Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

S4–M 206 **Année 2007–2008**

Probabilités, Fiche 3a

Variables aléatoires réelles discrètes.

Ex 1. On jette deux dés non pipés et on considère la v.a. X égale au plus grand des points obtenus. Quelle est la loi de X ?

Ex 2. Les cravates (MASS avril 03).

Dans cet exercice, on précisera pour chaque loi :
- *son nom si elle en a un,*
- *les valeurs que peut prendre la variable aléatoire correspondante,*
- *et la probabilité de chacune de ces valeurs.*

1) Monsieur Zzzz possède 50 cravates, dont une seule est à rayures. Tous les matins, il prend une cravate au hasard dans l'armoire, et tous les soirs il remet la cravate du jour à sa place.
On observe Monsieur Zzzz pendant 20 jours et on appelle X le nombre de fois où il porte une cravate à rayures. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
Application numérique : Calculer $P(X = 1)$.

2) Monsieur Zzzz part en voyage. Il met dans sa valise 20 cravates prises au hasard dans l'armoire.
Quelle est la loi du nombre V de cravates à rayures contenues dans la valise ?
Application numérique : Calculer $P(V = 1)$.

3) Monsieur Zzzz possède aussi 10 chemises dont 3 sont bleues. Il prend 5 chemises au hasard et les mets dans sa valise.
Quelle est la loi du nombre Y de chemises bleues contenues dans la valise ?
Application numérique : Calculer $P(Y = 1)$.

Ex 3. Un garage peut réparer huit voitures par jour. Chaque jour, huit conducteurs indépendants ont rendez-vous, chacun ayant une probabilité de 90% de venir effectivement.

1) Quelle est la loi du nombre X de voitures présentes au garage un jour donné ? En déduire la probabilité que le garage ne soit pas plein (moins de huit voitures à réparer).

2) Un véhicule qui entre a 70% de chances d'être réparé (tous ne sont pas réparables). On note Y le nombre de voitures réparées un jour donné. Calculer $P(Y = k|X = n)$ (distinguer le cas $0 \leq k \leq n$ du cas $k > n$). En déduire que la loi de Y est une binômiale dont on précisera les paramètres.

3) Pour i de 1 à 8, on définit la variable Z_i par :
$Z_i = 0$ si la i^{e} voiture ne vient pas ou n'est pas réparable.
$Z_i = 1$ si la i^{e} voiture se présente et est réparée.
En exprimant Y en fonction des Z_i, retrouver la loi de Y.

Ex 4. Soit λ un réel positif et soit $p \in [0,1]$. Dans une banque, le nombre de chèques émis par les clients en un jour est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Pour chaque chèque émis, la probabilité que ce chèque soit sans provision est p. On appelle Y le nombre de chèques émis sans provision lors d'une journée.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver $P(Y = k \mid X = n)$ suivant les valeurs de k.

2) Déterminer la loi de Y et celle de $X - Y$.

3) Les variables $X - Y$ et Y sont-elles indépendantes ?

Ex 5. 1) Quelle est la probabilité d'obtenir un double lorsqu'on lance une fois une paire de dés ?

2) On lance de façon répétée une paire de dés jusqu'à la première obtention d'un double. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers ainsi réalisés. Donner, en justifiant votre réponse, les valeurs de $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et plus généralement $P(X = k)$ où $k \geq 1$ est un entier quelconque. Comment s'appelle la loi de X ?

3) Soit $n \geq 1$ un nombre entier. Calculer *directement* la probabilité de n'obtenir aucun double lors des n premiers lancers. En déduire $P(X > n)$.

4) Pour $k > n$, vérifier que

$$P(X = k \mid X > n) = P(X = k - n).$$

Interprétation ?

Ex 6. n $(n \geq 3)$ personnes jouent au jeu suivant : chacune d'entre elles lance une pièce et un joueur est déclaré perdant si tous les joueurs sauf lui ont un résultat contraire du sien.

1) Quelle est la probabilité qu'il y ait un perdant ?

2) Soit X le nombre de parties nécessaires pour avoir un perdant. Déterminer la loi de X.

Ex 7. Galettes des rois

1) Au Resto U, c'est le jour des galettes des rois. Des centaines de galettes ont été coupées en huit et les parts, mélangées, sont alignées sur le presentoir des desserts. Chaque étudiant choisit une part au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait la fève ?
Sur un groupe de TD de 24 étudiants, on note X_i, pour i de 1 à 24, la variable aléatoire égale à 1 si le $i^{\text{ème}}$ étudiant trouve une fève et à 0 s'il n'en trouve pas. Donner la loi de chacun des X_i.
Exprimer à partir des X_i le nombre Y d'étudiants qui ont la fève. Quelle est la loi de Y ? (Donner la loi exacte, qui dépend du nombre N de galettes mises en présentoir, puis donner une loi approchée qui tient compte du fait que N est trés grand)

2) Nos 24 étudiants, pas vraiment rassasiés par le contenu de leur plateau, se sont cotisés pour acheter trois galettes. Ils coupent chacune en huit parts. Chaque étudiant choisit une part au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait la fève cette fois-ci ?
On note maintenant V_i, pour i de 1 à 24, la variable aléatoire égale à 1 si le $i^{\text{ème}}$ étudiant trouve une fève et à 0 s'il n'en trouve pas. Donner la loi de chacun des V_i.
Exprimer à partir des V_i le nombre W d'étudiants qui ont la fève cette fois-ci. Quelle est la loi de W ?

3) Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p. Quelle est la loi de $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$?

Ex 8. Au secours ! Mon ordinateur[1] a chopé un virus ! (avril 2004)

Les virus informatiques ne s'attaquent pas à l'ordinateur lui-même, mais à son système d'exploitation. Certains systèmes d'exploitation peuvent attraper des virus, d'autres n'en attrapent pas. Un même ordinateur est donc susceptible ou non d'attraper des virus, selon le système d'exploitation qu'on choisit d'installer dessus.

Un campus comporte 4000 ordinateurs, qu'on supposera indépendants. Parmi ces machines, 3500 ont un système d'exploitation susceptible d'attraper des virus. On les a donc équipées chacune d'un logiciel anti-virus. Si cet anti-virus est à jour, il repousse 95% des attaques de virus. Sinon, il n'en repousse que 60%. Et chaque machine a 20% de chances que son anti-virus ne soit pas à jour.

Les 500 autres machines du campus ont un système d'exploitation qui n'attrape pas de virus. Elles fonctionnent donc sans anti-virus.

1) On choisit un ordinateur au hasard sur le campus et on note :
$L = \{$ cet ordinateur ne peut pas attraper de virus $\}$
$M = \{$ cet ordinateur a un anti-virus qui est à jour $\}$
$N = \{$ cet ordinateur a un anti-virus qui n'est pas à jour $\}$.
Exprimer l'événement N à l'aide de M et L.
Calculer la probabilité de chacun de ces trois événements.

2) Un virus s'attaque à un ordinateur choisi au hasard sur le campus. Quelle est la probabilité $P(V)$ que l'attaque réussisse ?
Calculer la probabilité $P(V|L^c)$.Que représente-t-elle ?

3) Le virus a réussi à infecter l'ordinateur, et la personne concernée téléphone à son ingénieur-système. Il se dit : *je parie qu'elle a oublié de mettre à jour l'anti-virus !* Quelle est la probabilité qu'il ait raison ?

4) Un virus a pénétré sur le campus, et il est envoyé à tous les ordinateurs du campus. Donner (en justifiant bien) la loi du nombre X de machines qui seront infectées.

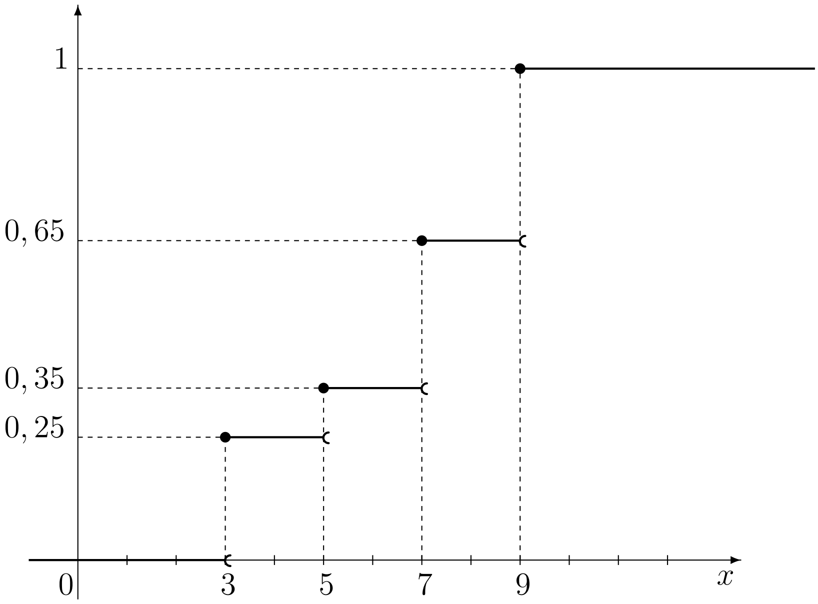
5) Un virus est envoyé à tous les ordinateurs depuis l'exterieur du campus. Or il existe à l'entrée du campus un filtre qui a 9 chances sur 10 de détecter ce virus et de le détruire. Si le virus n'est pas détruit, il attaque comme précédemment toutes les machines du campus. Dans cette situation, on note Y le nombre de machines qui seront infectées. Trouver la loi de Y.

Ex 9. Lire une fonction de répartition (avril 2004).

Voici le graphe de la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X donnée. En déduire la loi de X, qu'on présentera sous forme de tableau.

---

[1] Cet exercice est purement fictif ! Ne vous inquiétez pas pour mon ordinateur, il est à l'abri des virus.



Ex 10. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire avec remise dans cette urne et on note les numéros tirés : $(b_1, b_2 \cdots, b_k)$. On s'arrête dès que $b_{k-1} \leq b_k$. Soit X le nombre de tirages ainsi réalisés.

1) Déterminer la fonction de répartition de X.

2) Déterminer la loi de X.

Ex 11. Ecrans d'ordinateurs

Un écran d'ordinateur est formé de petits points lumineux appelés pixels. Il comporte 768 lignes de 1024 pixels, soit 786432 pixels en tout.

1) On utilise un procédé de fabrication qui assure que les pixels sont indépendants et que chacun n'a qu'une probabilité 9.10^{-7} d'être inutilisable. Quelle est la loi du nombre X de pixels grillés sur l'écran ?

2) L'écran est invendable si trois pixels au moins sont grillés. Calculer (en justifiant !) une valeur approchée de la probabilité pour un écran d'être invendable.

Ex 12. Fusée

Une fusée est composée de 200 000 pièces, dont chacune n'a qu'une chance sur un million d'être défectueuse. Si deux pièces au moins sont défectueuses, le lancement de la fusée échoue à coup sûr, si une seule est défectueuse, il a une chance sur deux d'échouer.

1) En précisant les hypothèses, donner la loi du nombre X de pièces défectueuses.

2) Exprimer la probabilité $P(E)$ que le lancement échoue, en fonction de $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.

3) Evaluer $P(E)$ grâce à une approximation de la loi de X. Que penser de ce projet ?