Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

S4–M 206 **Année 2007–2008**

Probabilités, Fiche 1a

Espaces de probabilités.

Ex 1. Ballons et bonbons

Trois enfants lancent chacun un ballon en direction d'un panier de basket. Il est convenu que celui qui marquera gagnera un paquet de bonbons, et qu'en cas d'ex-æquo les vainqueurs se partageront le paquet. Si personne ne réussit son panier, chacun mangera le tiers des bonbons. En utilisant les événements :

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Arthur marque un panier}\}, \\ B &= \{\text{Béatrice marque un panier}\}, \\ C &= \{\text{Cécile marque un panier}\}. \end{aligned}$$

écrire de façon ensembliste les événements suivants :

$$\begin{aligned} D &= \{\text{tous les trois réussissent à marquer}\}, \\ E &= \{\text{aucun ne réussit à marquer}\}, \\ F &= \{\text{Béatrice mange tous les bonbons}\}, \\ G &= \{\text{les trois enfants mangent des bonbons}\}, \\ H &= \{\text{Cécile mange au moins un bonbon}\}, \\ I &= \{\text{Arthur ne reçoit aucun bonbon}\}. \end{aligned}$$

Parmi tous ces événements, lesquels sont des événements élémentaires ?

Ex 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire à pile ou face n fois.

1) Donner une représentation de l'espace Ω des événements élémentaires de cette expérience.

2) Ecrire l'événement $F =$"pile n'a pas été obtenu lors des 2 premiers lancers" comme sous-ensemble de Ω.

3) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Décrire les éléments de l'événement $E_i =$ "le résultat du i-ième lancer est pile".

4) Ecrire à l'aide des événements E_i l'événement F.

5) Ecrire à l'aide des événements E_i l'événement $G =$" la pièce est tombée au moins une fois sur pile".

6) Ecrire à l'aide des ensembles E_i l'événement $H =$" la pièce est tombée au moins deux fois sur pile".

Ex 3. 1) Ecrire sans $\sum$, et calculer si possible :

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n, \quad \sum_{p=1}^{n} p, \quad \sum_{p=1}^{n} n, \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{p}.$$

2) Ecrire avec $\sum$:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

3) Les égalités suivantes sont-elles vraies :

$$\sum_{p=1}^{n}(p \times n) = \sum_{k=1}^{n}(k \times n) = n \times \sum_{k=1}^{n} k = k \times \sum_{k=1}^{n} n.$$

Ex 4. **Deux nombres à virgule.**

1) Mettre sous forme de fraction le nombre x dont l'écriture décimale illimitée est

$$x = 0.357357357357 \ldots\ldots 357 \ldots\ldots$$

(utiliser une série dont on calculera la somme).

2) Même question avec le nombre $0.4999\ldots9\ldots$. S'agit-il d'un développement décimal illimité ?

Ex 5. On effectue une suite infinie de lancers d'un dé. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$A_i = \{\text{Obtention de l'as au } i\text{-ème lancer}\}.$$

1) Donner une représentation de l'espace Ω des événements élémentaires de cette expérience. Décrire l'événement A_i comme sous-ensemble de Ω.

2) Ecrire à l'aide des événements A_i et A_i^c les événements :

$$E_5 = \{\text{La première apparition de l'as a lieu } \textit{après} \text{ le 5-ième lancer}\},$$

$$F_5 = \{\text{L'as n'apparaît pas au cours des 5 premiers lancers}\}.$$

3) Définir par une phrase ne comportant aucun vocabulaire mathématique chacun des événements :

$$G_5 = \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i, \quad H_5 = \left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c\right) \cap \left(\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i\right), \quad I_5 = \bigcup_{i\geq 5} A_i.$$

4) Comparer les événements E_5, F_5, G_5, H_5, et I_5.

5) Ecrire à l'aide des A_i l'événement " on obtient au moins une fois l'as au-delà du n-ième lancer ".

6) On pose $C_n = \bigcup_{i>n} A_i$. Montrer que la suite (C_n) est décroissante (i.e. que pour tout $n \geq 1$, C_{n+1} est inclus dans C_n). Caractériser d'une phrase ne comportant pas de vocabulaire mathématique l'événement $C = \bigcap_{n\geq 1} C_n$.

7) Ecrire à l'aide des A_i les événements :

$$\begin{aligned} B_n &= \{\text{On n'obtient plus que des as à partir du } n\text{-ième lancer}\}, \\ B &= \{\text{On n'obtient plus que des as à partir d'un certain lancer}\}. \end{aligned}$$

Ex 6.
Montrer que la probabilité de l'événement *réalisation d'un seul des deux événements A et B* est : $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

Ex 7. Dans un lot de pièces métalliques rectangulaires, destinées à un assemblage, on sait que :

3% ont une longueur qui, s'écartant trop des normes, les rend inutilisables.

5% ont une largeur les rendant inutilisables.

2% s'écartent trop de la norme, à la fois par leur longueur et par leur largeur.

On prend une pièce au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit utilisable ?

Ex 8. Ecriture binaire sur un octet
Soit les codes $(a_1, \ldots, a_{16})$, suite de 16 chiffres binaires (0 ou 1).

1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?

2) Combien y-a-t-il de codes s'écrivant
– avec un seul zéro ?
– avec deux zéros exactement ?
– avec au moins un zéro ?

Ex 9. ?+ ?+ ?+ ?+ ?=1000

Combien existe-t-il de 5-uplets $(i, j, k, l, m) \in \mathbb{N}^5$ tels que $i + j + k + l + m = 1000$?

Ex 10. On dispose de 15 fruits différents. De combien de façons peut-on les répartir dans trois corbeilles différentes ?
- si on met 5 fruits dans chaque corbeille,
- si le nombre de fruits par corbeille est quelconque,
- si le nombre de fruits par corbeille est quelconque, mais jamais nul
Indication : Combien de répartitions laissent vide la première corbeille ? Combien laissent vide au moins une corbeille ?

Ex 11. On place dans une urne 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire 2 boules. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit paire :

1) si on tire les deux boules simultanément ?

2) si on les tire successivement, avec remise entre les tirages ?

Ex 12. Dans un groupe de TD, on attribue au hasard une note entière entre 0 et 20 (il y a donc 21 valeurs possibles) à chaque étudiant.

1) On considère un groupe de TD de 10 étudiants. Décrire un espace de probabilité associé à cette épreuve aléatoire.

2) Quelle est la probabilité que, sur 10 étudiants, au moins deux aient la même note ?

3) Quelle est la probabilité que, sur 10 étudiants, aucun n'ait 20 ?

4) Quelle taille minimale devrait avoir le groupe de TD pour que la probabilité qu'au moins un étudiant ait 20 soit supérieure ou égale à 50% ?

Ex 13. Formule de Poincaré
Vérifier que si A, B, C sont trois événements :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Un raisonnement par récurrence[1] nous permet de généraliser cette formule sous la forme suivante. Pour toute famille $A_1, \dots, A_n$ d'événements :

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \cdots \\ &\cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) + \cdots \\ &\cdots + (-1)^{n+1} P(A_1\cap\cdots\cap A_n). \end{aligned}$$

Ex 14. Secrétariat (septembre 97 ex1, sans les v.a.)

Une secrétaire un peu distraite a tapé N lettres et préparé N enveloppes portant les adresses des destinataires, mais elle répartit au hasard les lettres dans les enveloppes. Pour modéliser cette situation, on choisit comme espace probabilisé Ω_N ensemble de toutes les permutations sur $\{1,\dots,N\}$ muni de l'équiprobabilité P_N. Pour $1 \leq j \leq N$, on note A_j l'événement *la j-ème lettre se trouve dans la bonne enveloppe.*

1) Calculer $P_N(A_j)$.

2) On fixe k entiers $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ entre 1 et N. Dénombrer toutes les permutations σ sur $\{1,\dots,N\}$ telles que $\sigma(i_1) = i_1$, $\sigma(i_2) = i_2$, $\dots$, $\sigma(i_k) = i_k$. En déduire $P_N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$.

3) On note B l'événement *au moins une des lettres est dans la bonne enveloppe.* Exprimer B à l'aide des A_j.

4) Utiliser la formule de Poincaré pour calculer $P_N(B)$ et sa limite quand N tend vers l'infini.

Ex 15.

On définit une probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(\{n\}) = c\frac{2^n}{n!}, \tag{1}$$

où c désigne une constante réelle strictement positive.

1) Déterminer c pour que (1) définisse effectivement une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

2) Quelle est la probabilité de l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 3 ?

Ex 16. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements ayant chacun une probabilité 1 (on rappelle que $P(A_n) = 1$ n'implique pas $A_n = \Omega$). On note A leur intersection. Que peut-on dire de $P(A)$?

[1] A ne pas faire *pendant la séance* de T.D. . . .il y a une preuve plus élégante basée sur l'espérance des indicatrices d'événements (cf. polycopié, exercices du chapitre 5).