Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math 314 **Année 2008–2009**

Mercredi 18 février 2009

En raison du mouvement de grève de l'université de Lille 1[1], les TD de Math 314 n'ont pas eu lieu ces dernières semaines. Nous[2] nous sommes réunis, et avons décidé de vous proposer de chercher et rédiger les trois exercices suivants. Le premier est une application de Borel-Cantelli, le deuxième fait un (petit) tour des différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires, et le dernier, déjà proposé « en cours », est une première approche de la notion de normalité asymptotique.
Nous vous proposons donc de déposer votre travail dans nos casiers, au plus tard le lundi 9 mars. Vous pouvez profiter de la semaine du 2 mars, qui n'est pas une semaine d'interruption pédagogique, pour nous poser vos questions sur ces exercices.
Il va sans dire que la préparation des ces trois exercices ne constitue pas le seul travail que vous ayez à faire en ce moment pour le module de Math 314. Lisez le poly en suivant les indications données sur le site, cherchez les exercices de la fiche 2, et bientôt de la fiche 3, etc.

Ex 1. Borel-Cantelli et les retours à l'origine
Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes telles que :

$$P(X_i = +1) = p \qquad P(X_i = -1) = 1 - p = q \qquad 0 < p < 1 \quad p \neq \frac{1}{2}.$$

On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad A_n = \{S_n = 0\}$$

L'événement A_n est un retour à zéro. On pose

$$A := \{\omega \in \Omega\ ;\ \text{la suite } S_n(\omega) \text{ repasse une infinité de fois en } 0\} = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{j\geq k} A_j.$$

1) Prouver que $P(A) = 0$.

2) En utilisant la loi forte des grands nombres, donner une conclusion plus précise permettant de retrouver le résultat précédent.

1. http ://greve.univ-lille1.fr
2. Gwenaelle.Castellan@math.univ-lille1.fr, M3 306, Charles.Suquet@math.univ-lille1.fr, M3 307 et Laurence.Marsalle@univ-lille1.fr, M3 304.

Correction.

1) Afin d'utiliser le Lemme de Borel-Cantelli I, calculons $P(A_n)$ $(n \geq 1)$.

$$P(A_n) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = 0\right).$$

Il est clair que si n est impair, alors $P(A_n) = 0$. Et si n est impair, disons que $= 2k$ alors $P(A_n) = C_{2k}^k p^k (1-p)^k$ (car $\sum_{i=1}^{2k} X_i = 0$ est réalisé s'il y a autant de X_i prenant la valeur $+1$ que de X_i prenant la valeur -1, autrement dit s'il y en a k parmi les $2k$).

Il s'agit ainsi de montrer la convergence de la série (à termes positifs)

$$\sum_{n\geq 1} P(A_n) = \sum_{k\geq 1} P(A_{2k}).$$

Pour cela, on peut trouver un équivalent de $C_{2k}^k p^k(1-p)^k$ quand $k \to +\infty$ à l'aide de la formule de Stirling[3]. On obtient donc

$$C_{2k}^k p^k (1-p)^k \underset{+\infty}{\sim} \frac{(4p(1-p))^k}{\sqrt{\pi k}},$$

ce qui est le terme d'une série convergente puisque $p(1-p) < \frac{1}{4}$. On aurait aussi pu utiliser le critère de d'Alembert pour montrer la convergence de la série.

Finalement, la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} P(A_n)$ implique par le Lemme de Borel-Cantelli I (Lemme 6.4 p.180) que $P(A) = 0$.

2) Les X_i étant des variables aléatoires indépendantes, de même loi, intégrables et d'espérance $E(X_i) = 2p - 1$, on peut appliquer la loi forte des grands nombre pour en déduire que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 2p-1.$$

Donc, il existe un ensemble Ω_1 de probabilité 1, tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 2p-1$ pour tout $\omega \in \Omega_1$. Comme $p \neq \frac{1}{2}$, on peut en déduire que presque sûrement, S_n est équivalent à $n(2p-1)$ quand n tend vers $+\infty$. Donc S_n converge quand n tend vers $+\infty$ presque sûrement vers $+\infty$ si $2p-1 > 0$ ou vers $-\infty$ si $2p-1 < 0$, et est donc non nul à partir d'un certain rang aléatoire. Plus précisément, pour tout $\omega \in \Omega_1$ il existe $N(\omega) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\text{pour tout } n \geq N(\omega)\ , \quad S_n(\omega) \neq 0,$$

et en particulier, $\omega \notin A_n$ pour tout $n \geq N(\omega)$. Finalement, on vient de montrer que si $\omega \in \Omega_1$ alors $\omega \in \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} A_n^c$. Donc,

$$P\Big(\bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} A_n^c\Big) = 1 \quad \text{et par conséquent} \quad P\Big(\bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} A_n\Big) = 0.$$

On retrouve le résultat obtenu par le lemme de Borel-Cantelli I.

3. On rappelle que $n! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Ex 2. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur l'espace de probabilité $(]0,1], \mathrm{Bor}(]0,1]), \lambda)$ de la façon suivante :

$$\forall n \geq 1 \quad Y_n = n^{1/p}\mathbf{1}_{]0,1/n]},$$

où p est un entier supérieur ou égal à 1 fixé.

1) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

2) Montrer qu'elle converge également en probabilité.

3) Que vaut $\mathbf{E}(Y_n^p)$? En déduire que chaque variable aléatoire Y_n est dans L^p, mais que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas dans L^p.

Correction.

1) Soit $\omega \in]0,1]$, il existe un rang $n_0(\omega)$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $1/n < \omega$. Par définition de Y_n, on a alors $Y_n(\omega) = 0$ pour tout $n \geq n_0$. On vient donc de montrer que

$$]0,1] \subset \left\{\omega \in]0,1];\ \lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega) = 0\right\},$$

d'où l'égalité entre ces deux ensembles. La suite $(Y_n(\omega))_{n\geq 1}$ converge donc vers 0 pour tout $\omega \in]0,1]$, ce qui entraîne la convergence presque sûre à proprement parler.

2) La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ convergeant presque sûrement, elle converge en probabilité vers la même limite, à savoir 0.
Si on souhaitait établir directement la convergence en probabilité, il suffit de remarquer que, comme $Y_n(\omega) \neq 0$ si et seulement si $\omega \in]0, 1/n]$, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$P(|Y_n| > \varepsilon) \leq \lambda(]0,1/n]) = 1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ce qui est la définition de la convergence en probabilité vers 0 de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$.

3) La variable aléatoire Y_n prend la valeur $n^{1/p}$ avec probabilité $\lambda(]0,1/n]) = 1/n$, et la valeur 0 avec probabilité $\lambda(]1/n,1]) = 1 - 1/n$. La variable aléatoire Y_n est donc positive discrète, ne prenant que deux valeurs.Ainsi, Y_n est dans L^p, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $p \geq 1$. Il est alors immédiat que Y_n^p prend la valeur n avec probabilité $1/n$, et la valeur 0 avec probabilité $1 - 1/n$, d'où $\mathbf{E}(Y_n^p) = n \times 1/n = 1$.
Supposons que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^p, vers une limite Z. Elle converge donc en probabilité vers cette même limite Z. Mais l'on a déjà établi que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ convergeait en probabilité vers 0, donc par unicité de la limite, $Z = 0$ p.s. La convergence L^p de Y_n vers $Z = 0$ se réécrit alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}|Y_n|^p = 0,$$

ce qui est impossible car $\mathbf{E}(|Y_n|^p) = 1$. La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ ne converge donc pas dans L^p, quel que soit $p \geq 1$.

Ex 3. Une compagnie d'assurances assure sur une année n personnes contre un certain risque. On note X_i la somme qu'aura à verser cette année la compagnie au i-ème client. C'est une variable aléatoire qui prend la valeur 0 lorsque le client n'est pas sinistré. On peut en général considérer que les variables aléatoires $X_1, \dots X_n$ sont indépendantes.

Supposons qu'elles obéissent toutes à une même loi d'espérance mathématique μ et de variance σ^2. Soit x la prime demandée à chacun des n clients. Comment la compagnie doit-elle fixer x pour qu'avec une probabilité supérieure à $1-\varepsilon$ la différence entre l'encaissement des primes et les remboursements sur l'année reste supérieure à un montant b déterminé par ses frais de gestion et le bénéfice minimum qu'elle désire faire ?

Correction. L'encaissement des primes correspond à la somme nx et les remboursements sur l'année (que l'on ne connait pas à l'avance) à la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n X_i$. On veut ainsi déterminer x de telle sorte que

$$P(nx - \sum_{i=1}^n X_i \geq b) \geq 1-\varepsilon.$$

Or par le TLC appliqué à la suite de variables aléatoires indépendantes X_i de même loi et de carré intégrable, pour tout réel t,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \leq t\sigma\sqrt{n}\right) = P(Z \leq t),$$

où Z est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

Choisissons $t = q_{1-\varepsilon}$ le quantile d'ordre $1-\varepsilon$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. En supposant que n est suffisamment grand pour pouvoir négliger l'erreur d'approximation gaussienne, on en déduit que

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq n\mu + q_{1-\varepsilon}\sigma\sqrt{n}\right) \simeq 1-\varepsilon.$$

Or $P(nx - \sum_{i=1}^n X_i \geq b) = P(\sum_{i=1}^n X_i \leq nx - b)$ et en choisissant $nx - b \geq n\mu + q_{1-\varepsilon}\sigma\sqrt{n}$, soit

$$x \geq \mu + \frac{b}{n} + q_{1-\varepsilon}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

on obtient $P(nx - \sum_{i=1}^n X_i \geq b) \geq 1-\varepsilon$ (en négligeant l'erreur d'approximation gaussienne).