Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math 314 **Année 2008–2009**

Mercredi 18 février 2009

En raison du mouvement de grève de l'université de Lille 1[1], les TD de Math 314 n'ont pas eu lieu ces dernières semaines. Nous[2] nous sommes réunis, et avons décidé de vous proposer de chercher et rédiger les trois exercices suivants. Le premier est une application de Borel-Cantelli, le deuxième fait un (petit) tour des différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires, et le dernier, déjà proposé « en cours », est une première approche de la notion de normalité asymptotique.
Nous vous proposons donc de déposer votre travail dans nos casiers, au plus tard le lundi 9 mars. Vous pouvez profiter de la semaine du 2 mars, qui n'est pas une semaine d'interruption pédagogique, pour nous poser vos questions sur ces exercices.
Il va sans dire que la préparation des ces trois exercices ne constitue pas le seul travail que vous ayez à faire en ce moment pour le module de Math 314. Lisez le poly en suivant les indications données sur le site, cherchez les exercices de la fiche 2, et bientôt de la fiche 3, etc.

Ex 1. Borel-Cantelli et les retours à l'origine

Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes telles que :

$$P(X_i = +1) = p \qquad P(X_i = -1) = 1 - p = q \qquad 0 < p < 1 \quad p \neq \frac{1}{2}.$$

On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad A_n = \{S_n = 0\}$$

L'événement A_n est un retour à zéro. On pose

$$A := \{\omega \in \Omega \,;\ \text{la suite } S_n(\omega) \text{ repasse une infinité de fois en } 0\} = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{j\geq k} A_j.$$

1) Prouver que $P(A) = 0$.

2) En utilisant la loi forte des grands nombres, donner une conclusion plus précise permettant de retrouver le résultat précédent.

---

[1] http ://greve.univ-lille1.fr

[2] Gwenaelle.Castellan@math.univ-lille1.fr, M3 306, Charles.Suquet@math.univ-lille1.fr, M3 307 et Laurence.Marsalle@univ-lille1.fr, M3 304.

Ex 2. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur l'espace de probabilité $(]0,1], \mathrm{Bor}(]0,1]), \lambda)$ de la façon suivante :

$$\forall n \geq 1 \quad Y_n = n^{1/p}\mathbf{1}_{]0,1/n]},$$

où p est un entier supérieur ou égal à 1 fixé.

1) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

2) Montrer qu'elle converge également en probabilité.

3) Que vaut $\mathbf{E}(Y_n^p)$? En déduire que chaque variable aléatoire Y_n est dans L^p, mais que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas dans L^p.

Ex 3. Une compagnie d'assurances assure sur une année n personnes contre un certain risque. On note X_i la somme qu'aura à verser cette année la compagnie au i-ème client. C'est une variable aléatoire qui prend la valeur 0 lorsque le client n'est pas sinistré. On peut en général considérer que les variables aléatoires $X_1, \dots X_n$ sont indépendantes. Supposons qu'elles obéissent toutes à une même loi d'espérance mathématique μ et de variance σ^2. Soit x la prime demandée à chacun des n clients. Comment la compagnie doit-elle fixer x pour qu'avec une probabilité supérieure à $1-\varepsilon$ la différence entre l'encaissement des primes et les remboursements sur l'année reste supérieure à un montant b déterminé par ses frais de gestion et le bénéfice minimum qu'elle désire faire ?