Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

S4–M 206 **Année 2005–2006**

Probabilités, Fiche 4a.
Espérance et variance.

Exercice 1.

1) On lance un dé. On désigne par X le nombre obtenu avec ce dé. Déterminer l'espérance de X.

2) Calculer l'espérance de la somme obtenue en lançant trois dés.

Exercice 2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ. Déterminer les lois de $X + Y$ et de $2X$. Calculer leur espérance.

Exercice 3. Backgammon (Janvier 2000)
Arthur et Béatrice jouent aux dés. La partie est déjà bien engagée, et à ce stade, c'est à Arthur de lancer les deux dés. Si au moins un des dés donne cinq, il gagne, et Béatrice doit lui donner 64 Francs. S'il n'obtient pas de cinq, il perd, et il doit alors 64 Francs à son adversaire. Béatrice propose :
"tu ne lances pas les dés, tu me donnes directement 30 Francs et nous sommes quittes."
On veut déterminer si Arthur a intérêt à accepter ce marché.

1) On note X la somme (positive ou négative) que va gagner Béatrice. Quelle est la loi de X ?

2) Calculer son espérance $E(X)$. Comparer ce gain moyen avec la somme de 30 Francs que Béatrice réclame et conclure.

Exercice 4. 5% des colis expédiés au moment des fêtes n'arrivent pas à destination.Une personne veut envoyer 2 cadeaux au même destinataire et se demande s'il vaut mieux les envoyer en un seul colis ou séparément.

1) Pour chacune des 2 méthodes, quelle est la probabilité qu'un cadeau au moins arrive à destination ?

2) De même, quelle est la probabilité que les deux cadeaux arrivent à destination ?

3) L'un des cadeaux vaut 100F et l'autre 150F. Quelle est l'espérance de la valeur qui arrivera à destination ?

Exercice 5. Le nombre de truffes trouvées par le cochon Sherlock durant une période de recherche T (en heures) suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(T)$. On sait que $\lambda(1) = 1,7$.

1) Calculer la probabilité que Sherlock ne trouve aucune truffe en une heure.

2) Calculer la probabilité que Sherlock trouve au moins 2 truffes en une heure.

On note maintenant X_1 le nombre de truffes trouvées par Sherlock un jour donné entre 6h et 7h et X_2 le nombre de truffes trouvées par Sherlock le même jour entre 7h et 8h.

3) Quelle est l'espérance de $X_1 + X_2$?

4) En déduire $\lambda(2)$.

5) Les événements $\{X_1 = 0\}$ et $\{X_2 = 0\}$ sont-ils indépendants ?

Exercice 6. On sait que le nombre d' automobiles réparées dans un garage pendant une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.

1) Que peut-on dire de la probabilité que le garage répare plus de 75 voitures en une semaine donnée ?

2) Si on sait de plus que la variance du nombre de voitures réparées est 25, que peut-on dire de la probabilité que ce nombre soit compris strictement entre 40 et 60 ?

Exercice 7. Une compagnie aérienne accepte n réservations pour chacun de ses vols comportant m places ($(n \geq m)$. Elle cherche à maximiser son bénéfice en choisissant la valeur optimale de n. Les données sont :

- Chaque passager ayant réservé une place est présent avec la probabilité p $(p < 1)$ à l'embarquement.
- Chaque passager embarqué génère un bénéfice de a francs.
- Chaque passager refusé à l'embarquement coûte b francs (dédommagement).
- Les passagers absents ne payent et ne coutent rien.
- Les comportements des passagers sont indépendants.

1) Soit Y_i la variable aléatoire égale à 1 si le $i$ième client est présent à l'embarquement et à 0 sinon. En utilisant les Y_i, exprimer le nombre X_n des passagers présents à l'embarquement sur les n clients ayant réservé.

2) Calculer en fonction de X_n et de m le bénéfice aléatoire B_n correspondant à n réservations.

3) Exprimer $B_{n+1} - B_n$ en utilisant les indicatrices des événements $\{X_n < m\}$, $\{X_n \geq m\}$ et $\{Y_{n+1} = 1\}$.

4) Calculer $\mathbb{E}(B_{n+1}) - \mathbb{E}(B_n)$ et en déduire une procédure de choix de n.