Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

S4–M 206 **Année 2005–2006**

Probabilités, Fiche 3a.
Variables aléatoires réelles discrètes.

Quelques exemples de calcul de loi

Exercice 1. On jette deux dés non pipés et on considère la v.a. X égale au plus grand des points obtenus. Quelle est la loi de X ?

Exercice 2. Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N. On en tire $n \leq N$ au hasard et sans remise.

1) Décrire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ associé à l'expérience aléatoire.

2) Soit $k \in \{1, \ldots, N\}$. Quelle est la probabilité que les jetons tirés aient tous des numéros inférieurs ou égaux à k ?

3) On désigne par X la variable égale au plus grand numéro des jetons tirés. Déterminer la loi de X.

4) Mêmes questions avec un tirage avec remise.

Exercice 3. Une urne contient N boules noires et blanches, dont b boules blanches. On tire les boules une à une de manière à vider l'urne.

1) Décrire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ associé à cette expérience.

2) On désigne par X_N la variable aléatoire égale au numéro du tirage de la première boule blanche tirée. Déterminer la loi de X_N.

3) Soit $k \in \{1, \ldots, N\}$, décrire l'évènement A_k : "une boule blanche a été tirée lors des k premiers tirages" en utilisant la variable X_N et calculer sa probabilité.

4) On fait tendre N vers $+\infty$ et on suppose que la proportion de boules blanches dans l'urne tend vers une constante a. Montrer que la probabilité $P(X_N = k)$ converge vers un réel que l'on notera p_k pour $k \in \mathbb{N}^*$. Que pouvez-vous dire de la famille $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$?

Lois classiques

Exercice 4. Un mobile évolue de façon aléatoire le long d'un axe gradué. A $t = 0$, il est à l'origine 0. A chaque instant entier $t = k$, $k \geq 0$ son abscisse varie de $+1$ avec probabilité p et -1 avec probabilité $1 - p$.

1) On définit le mouvement entre l'instant 0 et n par un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ où x_i est la variation du mobile entre l'instant $i - 1$ et i. Décrire l'espace de probabilité associé au déplacement du mobile entre l'instant 0 et n.

2) Quelle est la probabilité qu'entre les instants 0 et n le mobile ait varié de $+1$ k fois ?

3) On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de fois où le mobile a varié de $+1$ entre les instants 0 et n. Quelle est la loi de Y ?

4) On note X_n l'abscisse du mobile au temps $t = n$. Quelle est la relation entre X_n et Y. En déduire la loi de X_n.

Exercice 5. Ecrans d'ordinateurs

Un écran d'ordinateur est formé de petits points lumineux appelés pixels. Il comporte 768 lignes de 1024 pixels, soit 786432 pixels en tout.

1) On utilise un procédé de fabrication qui assure que les pixels sont indépendants et que chacun n'a qu'une probabilité 9.10^{-7} d'être inutilisable. Quelle est la loi du nombre X de pixels grillés sur l'écran ?
2) L'écran est invendable si trois pixels au moins sont grillés. Calculer (en justifiant !) une valeur approchée de la probabilité pour un écran d'être invendable.

Exercice 6. Galettes des rois

1) Au Resto U, c'est le jour des galettes des rois. Des centaines de galettes ont été coupées en huit et les parts, mélangées, sont alignées sur le presentoir des desserts. Chaque étudiant choisit une part au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait la fève ? Sur un groupe de TD (24 étudiants [1]) quelle est la loi du nombre Y d'étudiants qui auront la fève ? (Donner la loi exacte, qui dépend du nombre N de galettes mises en présentoir, puis donner une loi approchée qui tient compte du fait que N est grand)

2) Nos 24 étudiants, pas vraiment rassasiés par le contenu de leur plateau, se sont cotisés pour acheter trois galettes. Ils coupent chacune en huit parts. Chaque étudiant choisit une part au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait la fève cette fois-ci ? Sur le groupe de 24 étudiants, quelle est la loi du nombre Z d'étudiants qui auront la fève cette fois-ci ?

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire réelle discrète non nulle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, de fonction de répartition F.

1) Exprimer en fonction de F, la fonction de répartition G de la variable aléatoire réelle discrète $Y = \dfrac{1}{X^2}$.

2) Calculer F et G lorsque X suit une loi géométrique.

Exercice 8. La propriété d'absence de mémoire

1) Montrer que si X est une v. a. de loi géométrique, elle vérifie la propriété d'absence de mémoire suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k). \tag{1}$$

Interpréter ce résultat en considérant une suite d'épreuves répétées.

2) Trouver toutes les lois qui vérifient la propriété (1).

Indication : On notera $G(n) = P(X > n)$ et on montrera que (1) se traduit par une relation simple entre $G(n + k)$, $G(n)$ et $G(k)$.

Exercice 9. Deux personnes A et B lancent chacune un dé et répètent cette expérience. Soient X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de lancers du joueur A(resp. B) pour qu'il obtienne pour la première fois un 6.

1. On peut réver ...

1) Donner les lois de X et de Y.

2) Calculer la probabilité des événements $\{X = Y\}$, $\{X > Y\}$.

Mélange de lois, variables aléatoires indépendantes, espérance et variance

Exercice 10.

1) Dans un jeu basé sur un tirage au sort, il y a j joueurs indépendants ayant chacun la même probabilité r de gagner. On note S le nombre de gagnants. Quelle est sa loi ?

2) En fait le nombre de joueurs est une variable aléatoire N : il y a une population totale de n personnes, chacune ayant une probabilité p de participer au jeu.

a) Quelle est la loi de N ?

b) Exprimer $P(S = k)$ à l'aide des $P(S = k \mid N = j)$ et des $P(N = j)$ pour $0 \leq k \leq j \leq n$.

c) En déduire par le calcul que S suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, rp)$.

3) Pour retrouver ce résultat de façon plus légère, on numérote de 1 à n les individus de la population et on note J_i et G_i les évènements :

$$J_i := \{ \text{ L'individu n}^{\text{o}}\ i \text{ joue } \}, \qquad G_i := \{ \text{ L'individu n}^{\text{o}}\ i \text{ gagne } \}.$$

Calculer $P(J_i \cap G_i)$. En déduire la loi de S.

Exercice 11. Soit λ un réel positif et soit $p \in [0, 1]$. Dans une banque, le nombre de chèques émis par les clients en un jour est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Pour chaque chèque émis, la probabilité que ce chèque soit sans provision est p. On appelle Y le nombre de chèques émis sans provision lors d'une journée.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver $P(Y = k \mid X = n)$ suivant les valeurs de k.

2) Déterminer la loi de Y et celle de $X - Y$.

3) Les variables $X - Y$ et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 12. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs -1 et 1 avec probabilité $1/2$ chacune. Posons $Z = XY$. Etudier l'indépendance deux à deux des variables aléatoires X, Y et Z, puis l'indépendance de la famille (X, Y, Z).

Exercice 13. Soit X et Y deux variables indépendantes suivant une loi binômiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

1) Trouver $P(X + Y = n)$, puis $P(X = k \mid X + Y = n)$. En déduire l'identité :

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

2) Calculer $P(X = Y)$. Comparer $P(X > Y)$ et $P(X < Y)$; en déduire un calcul rapide de $P(X < Y)$.

Exercice 14. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ. Déterminer les lois de $X + Y$ et de $2X$. Calculer leur espérance.

Exercice 15. Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 2$). On tire au hasard $2n$ jetons en remettant chaque jeton tiré avant d'en tirer un autre.

1) Décrire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ associé à cette expérience aléatoire.

2) Décrire l'événement "les k premiers jetons tirés sont les seuls jetons tirés dont le numéro est 1" et calculer sa probabilité (pour $k \in \{1, \ldots, 2n\}$).

3) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On désigne par X_i la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés dont le numéro est i. Déterminer la loi de X_i. Quelle est son espérance et sa variance ? Les variables X_i sont-elles indépendantes ?

4) On note $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, quelle est la loi, l'espérance et la variance de S ?

5) On note r_n la probabilité d'avoir tiré 4 fois au moins le jeton numéroté 1.

– En utilisant l'inégalité de Markov puis celle de Tchebychev, majorer r_n.

– En utilisant une approximation de la loi de X_1, donner la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.