Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

S4–M 206 **Année 2005–2006**

Probabilités, Fiche 2a.

Probabilités conditionnelles et indépendance.

Exercice 1. Un test sanguin est positif avec une probabilité $0,95$ sachant que la personne est malade. Ce test est négatif avec une probabilité $0,9$ sachant la personne n'est pas malade. La probabilité qu'une personne prise au hasard soit malade vaut $0,2$.

M : « la personne est malade »,
T : « le test est positif ».

1) Calculer $P(M \cap T)$.

2) Calculer $P(T)$.

3) En déduire $P(M|T)$.

4) Calculer la probabilité que le test se trompe (c'est-à-dire test positif sur une personne non malade ou test négatif sur une personne malade).

Exercice 2. Un test permet de dépister si une pièce est défectueuse. Il n'est cependant pas fiable absolument. Ce test donne pour pièce défectueuse une pièce défectueuse dans 95 % des cas et une pièce non défectueuse pour une pièce saine dans 90 % des cas. Un lot de pièces contient 8 % de pièces défectueuses. On prend une des pièces du lot au hasard : la pièce choisie est testée et déclarée défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'elle le soit vraiment ?

Exercice 3. Alcootest

On s'intéresse à la fiabilité d'un alcootest pour automobilistes. Grâce à des études statistiques sur un grand nombre d'automobilistes, on sait que $0,5\%$ d'entre eux dépassent la dose d'alcool autorisée.

Aucun test n'est fiable à 100%. Avec celui que l'on considère, la probabilité que le test soit positif quand la dose d'alcool autorisée est dépassée, et la probabilité que le test soit négatif quand elle ne l'est pas, valent toutes deux $\rho = 0,95$.

Quelle est la probabilité qu'un automobiliste ayant un test positif ait réellement dépassé la dose d'alcool autorisée ?

Quelle devrait être la valeur de ρ pour que cette probabilité soit de 95% ?

Un policier affirme : *Ce test est beaucoup plus fiable le samedi soir à la sortie des boites de nuit !* Sachant que la proportion d'automobilistes ayant trop bu est alors de 30%, déterminer s'il a raison.

Exercice 4. Rouge ou blanc ?

On dispose de trois cartes, la première, RR, est rouge sur les deux faces, la deuxième, BB, est blanche sur les deux faces, et la dernière, RB, est rouge d'un côté et blanche de l'autre.

Un distributeur neutre tire une carte au hasard et la présente une face exposée. On demande de parier sur la couleur de la face cachée. Quel serait votre choix ?

Exercice 5. On sait, avec une probabilité $p\,(0 < p < 1)$, que la personne que l'on cherche habite un immeuble de 7 étages habitables que l'on explore. On a exploré en vain les 6 premiers étages.

1) Sachant qu'on a exploré en vain les 6 premiers étages, quelle est la probabilité qu'elle habite au septième étage ?

2) On note $f(p)$ cette probabilité. Représenter la fonction $p \to f(p)$

Exercice 6. Filles et garçons

1) On vous présente un monsieur. Au cours de la brève conversation qui suit, vous apprenez qu'il a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ? (Justifier en donnant l'espace probabilisé et les événements utilisés).

2) Même question si on apprend qu'il a deux enfants dont l'ainé est une fille.

Exercice 7. On lance deux dés et on considère les événements :
A : "le résultat du premier dé est impair"
B : "le résultat du second dé est pair"
C : "les résultats des deux dés sont de même parité"
Etudier l'indépendance deux à deux des événements A, B et C, puis l'indépendance de la famille A, B, C.

Exercice 8. Pour chacune des assertions suivantes donner soit une preuve, soit un contre-exemple.

1) si A et B sont deux événements indépendants et incompatibles alors l'un des deux événements au moins est de probabilité nulle.

2) si l'un des événements A ou B est de probabilité nulle alors A et B sont indépendants et incompatibles.

3) Si un événement A est indépendant d'un événement B, alors il est indépendant de l'événement complémentaire B^c.

4) Si un événement A est indépendant d'un événement B et d'un événement C, alors il est indépendant de $B \cup C$.

Exercice 9.

1) Quatre personnes lancent dix fois chacune une pièce équilibrée. Le but est d'obtenir pile 7 fois ou plus. Quelle est la probabilité que l'une au moins réussisse ?

2) Dans une revue médicale, on lit :
Avec le traitement actuel, le taux de guérison de cette maladie n'est encore que de 50%. Mais les laboratoires X viennent d'annoncer la mise au point de quatre nouvelles molécules dont l'une au moins semble prometteuse : Testée sur 10 patients, elle en a guéri 7...
Au vu du résultat de la question 1), qu'en pensez-vous ?

Exercice 10. Une expérience aléatoire peut avoir r résultats différents notés $R_1, \ldots R_r$, chaque R_i ayant une probabilité p_i d'advenir. On répète cette expérience n fois de façon indépendante.

1) Déterminer l'ensemble des réalisations possibles de cette suite d'expériences et construire l'espace de probabilité correspondant.

2) Soient $n_1, n_2, \dots, n_r$, r nombres entiers positifs tels que $n_1 + \cdots + n_r = n$. On considère les évènements $A_i = \{\text{il y a } n_i \text{ expériences ayant pour résultat } R_i\}$. Donner une expression de $P(A_1 \cap \cdots \cap A_r)$.

Exercice 11. On effectue des lancers répétés d'une paire de dés et on observe pour chaque lancer la *somme* des points indiqués par les deux dés. On se propose de calculer de deux façons la probabilité de l'événement E défini ainsi : *dans la suite des résultats observés, la première obtention d'un* 9 *a lieu avant la première obtention d'un* 7.

1) Quelle est la probabilité de n'obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer ?

2) *Première méthode :* On note $F_i = \{\textit{obtention d'un } 9 \textit{ au i-ème lancer}\}$ et pour $n > 1$, $E_n = \{\textit{ ni } 7 \textit{ ni } 9 \textit{ ne sont obtenus au cours des } n-1 \textit{ premiers lancers et le n-ième lancer donne } 9\}$. Dans le cas particulier $n = 1$, on pose $E_1 = F_1$.

a) Exprimer E à l'aide d'opérations ensemblistes sur les E_n $(n \geq 1)$. Exprimer de même chaque E_n à l'aide des F_i et des $H_i = \{\textit{ ni } 7 \textit{ ni } 9 \textit{ au i-ème lancer}\}$.
b) Calculer $P(E_n)$ en utilisant l'indépendance des lancers.
c) Calculer $P(E)$.

3) *Deuxième méthode :* On note $G_1 = \{\textit{ obtention d'un } 7 \textit{ au premier lancer}\}$.

a) Donner une expression de $P(E)$ en utilisant le conditionnement par la partition $\{F_1, G_1, H_1\}$.
b) Donner sans calcul les valeurs de $P(E \mid F_1)$, $P(E \mid G_1)$ et expliquer pourquoi $P(E \mid H_1) = P(E)$.
c) En déduire la valeur de $P(E)$.

Exercice 12.

Deux urnes U et U' contiennent chacune des boules vertes et des rouges. Les proportions de boules vertes dans U et U' seront notées respectivement p et p' $(p, p' \in]0,1[)$. On effectue une suite de tirages *avec remise* d'une boule selon la procédure suivante. Pour initialiser la procédure, on commence par choisir au hasard suivant un certain procédé l'une des deux urnes. La probabilité de choix de U par ce procédé est notée α $(0 \leq \alpha \leq 1)$. On tire une boule dans l'urne ainsi choisie. Si elle est verte, le tirage suivant aura lieu dans l'urne U. Si elle est rouge, il aura lieu dans l'urne U'...Et on continue indéfiniment en appliquant cette règle à chaque étape. Chaque boule tirée est remise dans l'urne d'où elle provient avant le tirage suivant. On note R_i l'événement "obtention d'une rouge au $i$ème tirage", V_i l'événement "obtention d'une verte au $i$ème tirage" et on pose $\pi_n = P(V_n)$.

1) Calculer π_1à l'aide de p, p' et α.

2) Que valent $P(V_n|R_{n-1})$ et $P(V_n|V_{n-1})$?

3) Etablir une relation de récurrence entre π_n et π_{n-1}.

4) En déduire une formule explicite donnant π_n en fonction de p, p', α et n.
Indication : On pourra chercher une constante c telle que $u_n = \pi_n - c$ soit le terme général d'une suite géométrique.
Quelle est la limite de π_n quand n tend vers l'infini ?

5) Utiliser ce qui précède pour déterminer *sans calcul* les probabilités conditionnelles $P(V_{n+k}|V_n)$ et $P(V_{n+k}|R_n)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

6) Les événements V_{n+k} et V_n sont-ils indépendants ?

Exercice 13. Pile ou face triphasé

Trois personnes nommées A, B, C lancent à tour de rôle la même pièce de monnaie

(ABCABCABC...). La probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est p ($0 < p < 1$). Le gagnant est le premier qui obtient pile (la partie *s'arrête* alors).

1) On note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement *A gagne la partie lors du n-ième lancer* (resp. B, C). Calculer $P(A_1)$, $P(B_2)$, $P(C_3)$. Les événements A_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

2) En discutant suivant les valeurs de n, calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$.

3) Calculer la probabilité de gagner de chacun des trois joueurs.

4) Quelle est la probabilité qu'il y ait un vainqueur ? Conclure.