Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

S4–M 206 **Année 2005–2006**

Probabilités, Fiche 1a

Espaces de probabilités.

Préliminaires : logique et langage ensembliste

Exercice 1. Soient f et g deux applications de Ω dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\{\omega \in \Omega,\ f(\omega) + g(\omega) \geq \varepsilon\} \subset \{\omega \in \Omega,\ f(\omega) \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{\omega \in \Omega,\ g(\omega) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Exercice 2. Etant donné un sous-ensemble A d'un ensemble Ω, on désigne par fonction indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$ la fonction définie sur Ω par : $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

1) Soient A et B deux sous-ensembles de Ω. Vérifier que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ si et seulement si $A = B$.

2) Exprimer les fonctions indicatrices de A^c, $A \cap B$, $A \times B$ et $A \cup B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et B.

Evénements élémentaires et événements observables

Exercice 3. Ballons et bonbons
Trois enfants lancent chacun un ballon en direction d'un panier de basket. Il est convenu que celui qui marquera gagnera un paquet de bonbons, et qu'en cas d'ex-æquo les vainqueurs se partageront le paquet. Si personne ne réussit son panier, chacun mangera le tiers des bonbons.

1) En utilisant les événements :

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Arthur marque un panier}\}, \\ B &= \{\text{Béatrice marque un panier}\}, \\ C &= \{\text{Cécile marque un panier}\}. \end{aligned}$$

écrire de façon ensembliste les événements suivants :

$$\begin{aligned} D &= \{\text{tous les trois réussissent à marquer}\}, \\ E &= \{\text{aucun ne réussit à marquer}\}, \\ F &= \{\text{Béatrice mange tous les bonbons}\}, \\ G &= \{\text{les trois enfants mangent des bonbons}\}, \\ H &= \{\text{Cécile mange au moins un bonbon}\}, \\ I &= \{\text{Arthur ne reçoit aucun bonbon}\}. \end{aligned}$$

2) Quel espace Ω des événements élémentaires choisiriez-vous pour décrire cette expérience aléatoire ?

3) Ecrire les événements ci-dessus comme sous-ensembles de Ω. Parmi ces événements, lesquels sont des événements élémentaires ?

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire à pile ou face n fois.

1) Donner une représentation de l'espace Ω des événements élémentaires de cette expérience.

2) Ecrire l'événement $F =$"pile n'a pas été obtenu lors des 2 premiers lancers" comme sous-ensemble de Ω.

3) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Décrire les éléments de l'événement $E_i =$ "le résultat du i-ième lancer est pile".

4) Ecrire à l'aide des événements E_i l'événement F.

5) Ecrire à l'aide des événements E_i l'événement $G =$" la pièce est tombée au moins une fois sur pile".

6) Ecrire à l'aide des ensembles E_i l'événement $H =$" la pièce est tombée au moins deux fois sur pile".

Exercice 5. Dur métier
Une princesse est enfermée dans un château. Un prince est envoyé pour la délivrer. Dans la cour du château se trouvent plusieurs portes. L'une mène chez la princesse, une autre dans l'antre d'un dragon. Toutes les autres cachent des sorcières.
Le prince choisit une porte au hasard. S'il trouve la princesse il la délivre [1], s'il trouve le dragon il se fait dévorer. S'il tombe sur une sorcière, elle le reconduit dans la cour après lui avoir fait boire un philtre qui lui fait oublier la porte qu'il a choisie.
Le prince recommence ses tentatives jusqu'à ce qu'il délivre la princesse ou soit dévoré.

On définit pour $k \in \mathbb{N}^*$ les événements :

$$\begin{aligned} E_k &= \{\text{Le prince est dévoré à la } k\text{-ième tentative}\}, \\ R_k &= \{\text{Le prince délivre la princesse à la } k\text{-ième tentative}\}, \\ S_k &= \{\text{Le prince trouve une sorcière à la } k\text{-ième tentative}\}. \end{aligned}$$

1) Donner une représentation de l'espace Ω des événements élémentaires de cette expérience. Exprimer les événements E_k, R_k et S_k comme sous-ensembles de Ω.

2) En utilisant les E_k, R_k et S_k, exprimer les événements :

$$\begin{aligned} E &= \{\text{Le prince échoue, il est dévoré}\}, \\ R &= \{\text{Le prince réussit à délivrer la princesse}\}, \\ I &= \{\text{Le prince recommence indéfiniment ses tentatives}\}. \end{aligned}$$

Que vaut $E \cup R \cup I$?

3) Exprimer l'événement :

$$T_k = \{\text{La } k\text{-ième tentative a bien lieu}\},$$

- en n'utilisant que E_k, R_k et S_k,
- en n'utilisant que les E_i, R_i et S_i avec $i < k$ (pour $k \geq 2$),
- en n'utilisant que les E_i, R_i avec $i \geq k$ et S_i avec $i > k$.

1. Et ils seront heureux et contribueront fortement à la démographie galopante...

Manipulation du signe $\sum$ et séries

Exercice 6.

1) Ecrire sans $\sum$ (sans nécessairement donner une formule exacte) :

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n, \quad \sum_{p=1}^{n} p, \ \sum_{p=0}^{n-1}(p+1), \ \sum_{p=1}^{n} n, \ \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{p}.$$

2) Ecrire avec $\sum$:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

3) Les égalités suivantes sont-elles vraies :

$$\sum_{p=1}^{n}(p \times n) = \sum_{k=1}^{n}(k \times n) = n \times \sum_{k=1}^{n} k = k \times \sum_{k=1}^{n} n.$$

Exercice 7. Soit $x \in]0,1[$. On se propose de montrer que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$ est convergente et de calculer sa somme.

1) Comparer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ avec $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} x^{k-1}$.
2) En déduire un calcul de $S_n = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. Conclure.
3) Utiliser la même méthode pour calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^{k-1}$.
4) En déduire l'espérance et la variance de la loi géométrique.

Généralités sur la définition de probabilité

Exercice 8. Échauffement
Montrer que la probabilité de l'événement *réalisation d'un seul des deux événements A et B* est : $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

Exercice 9. Deux événements A et B sont tels que : $P(A) = P(B) = 0,75$. Quel est le maximum de $P(A \cap B)$? Quel est son minimum ?

Exercice 10. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements ayant chacun une probabilité 1 (on rappelle que $P(A_n) = 1$ n'implique pas $A_n = \Omega$). On note A leur intersection. Que peut-on dire de $P(A)$?

Formule de Poincaré

Exercice 11. Formule de Poincaré
Vérifier que si A, B, C sont trois événements :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Un raisonnement par récurrence[2] nous permet de généraliser cette formule sous la forme suivante. Pour toute famille $A_1, \dots, A_n$ d'événements :

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \cdots \\ &\cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) + \cdots \\ &\cdots + (-1)^{n+1} P(A_1\cap\cdots\cap A_n). \end{aligned}$$

Ecrire cette formule lorsque les probabilités $P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})$ sont toutes égales pour $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ et $k \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 12. Soit $p \ge 4$. On construit un mot de p lettres en choisissant au hasard des lettres dans un alphabet constitué de 4 lettres différentes $\{A, T, C, G\}$. Décrire l'espace de probabilité associé à cette expérience. Quelle est la probabilité que dans le mot obtenu les 4 lettres de l'alphabet soient présentes ?

Espaces de probabilité finis

• Dénombrement

Exercice 13.

1) On appelle p-arrangement d'un ensemble E, un p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ de p éléments de E tous distincts. Si E est un ensemble à n éléments, déterminer le nombre de p-arrangements de E.

2) On appelle p-combinaison d'un ensemble E, un sous-ensemble de E à p éléments. Si E est un ensemble à n éléments, déterminer le nombre de p-combinaisons de E.

3) Quel est le cardinal de l'ensemble $X = \{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, n\}^p \text{ tel que } i_1 < \ldots < i_p\}$?

Exercice 14. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux réels. Etablir la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Exercice 15. Un sac de billes contient n billes en verre et r billes en terre. On vide le sac en choisissant au hasard les billes une par une.

1) Calculer pour $j \in \{1, \dots, r\}$ et $k \in \{j, \dots, n+r\}$, la probabilité d'obtenir la j-ième bille en terre au k-ième tirage ?

2) En déduire que $\sum_{l=0}^{n} C_{l+j-1}^{l} C_{n+r-l-j}^{n-l} = C_{n+r}^{r}$.

3) Donner la valeur de $\sum_{j=1}^{r} C_{k-1}^{j-1} C_{n+r-k}^{r-j}$.

• Modélisation

Exercice 16. On lance deux dés à six faces.

2. A ne pas faire *pendant la séance* de T.D. . . .il y a une preuve plus élégante basée sur l'espérance des indicatrices d'événements (cf. polycopié, exercices du chapitre 5).

1) Décrire l'espace de probabilité associé à cette expérience et donner la probabilité d'obtenir

- un double ?
- au plus un nombre pair ?
- exactement un nombre pair ?
- deux nombres qui se suivent ?

2) Soit $k \in \{2, \ldots, 12\}$. Calculer la probabilité, notée q_k, d'obtenir, avec les deux dés, une somme égale à k. Montrer que la famille de réels $\{q_k,\ k = 2, \ldots, 12\}$ définit une probabilité Q sur l'espace $(\{2, \ldots, 12\}, \mathcal{P}(\{2, \ldots, 12\}))$.

3) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieure ou égale à 6 ?

Exercice 17. On joue avec deux dés non standard, un bleu et un rouge :

- le dé bleu a une face avec le chiffre 1, deux faces avec le chiffre 2, et trois faces avec le chiffre 3.
- le dé rouge a quatre faces avec le chiffre 1, et deux faces avec le chiffre 2.

On lance une fois ces deux dés.

1) Décrire un espace de probabilité associé à cette épreuve aléatoire.

2) Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit l'évènement $S_k =$ "la somme des résultats des deux dés vaut k". Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la probabilité de S_k.

Exercice 18. Dans un groupe de TD, on attribue au hasard une note entière entre 0 et 20 (il y a donc 21 valeurs possibles) à chaque étudiant.

1) On considère un groupe de TD de 10 étudiants.

a) Décrire un espace de probabilité associé à cette épreuve aléatoire.

b) Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants aient la même note ?

c) Quelle est la probabilité qu'aucun étudiant n'ait 20 ?

2) Quelle taille minimale devrait avoir le groupe de TD pour que la probabilité qu'au moins un étudiant ait 20 soit supérieure ou égale à 50% ?

Exercice 19. On tire, une à une, sans les remettre dans le paquet, cinq cartes dans un jeu de 32 cartes ; chaque succession de cartes ainsi tirées s'appelle une main.

1) Quel est l'espace de probabilité que vous considérez ?

2) Quelle est la probabilité qu'une main contienne :

a) que des cartes d'une même couleur ?

b) exactement trois rois ? au plus un roi ? au moins un roi ou un as ?

3) Mêmes questions si le tirage se fait avec remise.

Exercice 20. On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes, et on s'intéresse à la position de deux amis particuliers dans cette file d'attente.

1) Décrire l'espace de probabilité associé que vous considérez et calculer la probabilité, notée q_r, que deux amis soient distants de r places (i.e. séparés par $r - 1$ personnes).

2) Quelle est la distance la plus probable entre ces deux amis ?

Espaces de probabilité infinis

Exercice 21. Soit P la probabilité définie sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ par $P(\{n\}) = 2^{-n}$. Calculer la probabilité de tirer un nombre $n > 3$; un nombre n multiple de 3 ; un nombre dont le reste est 3 si on le divise par 4.