Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS-Math314 **Année 2005-2006**

Fiche n° 5

Ex 1. *Simulation de lois gaussiennes*

Soit $M_i = (U_i, V_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vecteurs i.i.d de loi uniforme sur $[-1,1]^2$. On définit la variable aléatoire

$$T := \inf\left\{n \in \mathbb{N}^* \ : \ U_n^2 + V_n^2 < 1\right\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

1) Quelle est la loi de T et celle de M_T ?

2) On pose $R^2 = U_T^2 + V_T^2$ et

$$X = U_T\sqrt{\frac{-2\log(R^2)}{R^2}} \quad \text{et} \quad Y = V_T\sqrt{\frac{-2\log(R^2)}{R^2}}.$$

Quelle est la loi du vecteur (X,Y) ? (On pourra utiliser un changement de variable en coordonnées polaires dans le calcul de $E(f(X,Y))$).

Ex 2. *Les ex-aequo d'un échantillon*

1) On se propose de montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles *indépendantes* de fonctions de répartition respectives F et G et si F est *continue*, alors $P(X = Y) = 0$. Voici quelques indications. On note pour $M \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta_M := \{(x,y) \in]-M,M]^2;\ x = y\} \quad \text{et} \quad \Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = y\}.$$

Il s'agit de prouver que $P_{(X,Y)}(\Delta) = 0$ (pourquoi ?). En remarquant[1] que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta_M \subset \bigcup_{-Mk\leq j<Mk} \left]\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right]^2,$$

utiliser la continuité *uniforme* de F sur le *compact* $[-M,M]$ pour montrer que

$$\forall\varepsilon > 0, \quad P_{(X,Y)}(\Delta_M) \leq \varepsilon\big(G(M) - G(-M)\big).$$

En déduire que $P_{(X,Y)}(\Delta_M) = 0$, puis que $P_{(X,Y)}(\Delta) = 0$.

2) Montrer que si $X_1, \dots, X_n$ est un échantillon de la loi de f.d.r. F continue, presque sûrement il n'y a pas d'*ex-aequo* dans l'échantillon.

3) On suppose que la f.d.r. F est discontinue au point x_0 et on note

$$N_n(x_0) := \operatorname{card}\{i = 1,\dots,n;\ X_i = x_0\}.$$

Montrer que $N_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty$. On donnera un résultat plus précis que cette affirmation.

[1] Dessin impératif !

Ex 3. *Calculs sur la f.d.r. empirique*

On note $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de la loi de f.d.r. F, *i.e.* les X_i sont indépendantes et de même loi de f.d.r. F. On note F_n la fonction de répartition empirique associée à l'échantillon :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}.$$

1) Tracer le graphe de F_n pour une réalisation de l'échantillon $X_1, \dots, X_n$ de votre choix (en prenant $n = 5$ par exemple).

2) On suppose dans cette question que les X_i sont des v.a. positives (ou plus généralement que $P(X_1 < 0) = 0$). Calculez $\int_0^{+\infty}(1 - F_n(t))\,\mathrm{d}t$ et interprétez le résultat.

Ex 4. *Polygone de fréquences cumulées croissantes*

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon, F la f.d.r. de chaque X_i et F_n la fonction de répartition empirique associée à cet échantillon. On note $X_{n:1}, \dots, X_{n:n}$ les statistiques d'ordre de l'échantillon, obtenues par le réordonnement croissant de l'échantillon, *i.e.* pour tout $\omega \in \Omega$, $\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} = \{X_{n:1}(\omega), \dots, X_{n:n}(\omega)\}$ et $X_{n:i}(\omega) \leq X_{n:i+1}(\omega)$ pour $i = 1, \dots, n-1$. En particulier $X_{n:1} = \min_{1\leq i\leq n} X_i$ et $X_{n:n} = \max_{1\leq i\leq n} X_i$. On posera par commodité $X_{n:0} := X_{n:1} - 1$ (convention non standard). On définit le lissage polygonal G_n de F_n, comme la fonction continue affine par morceaux valant 1 à droite de $X_{n:n}$, valant 0 à gauche de $X_{n:1} - 1$, coïncidant avec F_n en chaque $X_{n:i}$ (donc en chaque point de saut de F_n) et interpolant linéairement entre deux sauts consécutifs de F_n.

1) Représentez F_n et G_n pour les deux échantillons observés suivants

$$X_1(\omega) = 2;\ X_2(\omega) = 1{,}5;\ X_3(\omega) = 4;\ X_4(\omega) = 0{,}5.$$

$$X_1(\omega') = 3;\ X_2(\omega') = 2;\ X_3(\omega') = 2;\ X_4(\omega') = 1{,}5;\ X_5(\omega') = 4.$$

2) On suppose dans cette question F continue sur $\mathbb{R}$. En utilisant le théorème de Glivenko-Cantelli, montrez que presque-sûrement G_n converge vers F uniformément sur $\mathbb{R}$ quand n tend vers $+\infty$.

3) Donnez un argument général montrant que cette convergence uniforme presque sûre ne peut avoir lieu lorsque F n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Proposez une autre explication de ce résultat négatif en vous basant sur l'exercice **??**.