



Fiche n° 4

Ex 1. *La méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales*

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On se propose de donner une valeur approchée de

$$m := \int_0^1 f(x) dx,$$

par une méthode probabiliste appelée « méthode de Monte-Carlo ». Pour cela on utilise la simulation informatique d'une suite $(U_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose

$$M_{2n} := \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} f(U_i) \quad \text{et} \quad \tilde{M}_{2n} := \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (f(U_i) + f(1 - U_i))$$

1) Expliquer pourquoi $X_1 := f(U_1)$ et $Y_1 := f(U_1) + f(1 - U_1)$ sont intégrables et exprimer leur espérance à l'aide de l'intégrale m .

2) En vous appuyant sur un théorème du cours, montrer que les suites $(M_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\tilde{M}_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent presque sûrement vers m quand n tend vers $+\infty$.

Ce résultat légitime pour n « grand » l'approximation de m par la valeur $M_{2n}(\omega)$ ou celle de $\tilde{M}_{2n}(\omega)$ calculée à partir de l'échantillon généré par l'ordinateur.

3) Expliquer pourquoi X_1 et Y_1 sont de carré intégrables et exprimer leur variance à l'aide de la fonction f .

4) On suppose de plus que f est croissante sur $[0, 1]$.

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, $(f(x) - f(y))(f(1 - x) - f(1 - y)) \leq 0$.

b) En déduire que $\mathbf{E}[f(U_1)f(1 - U_1)] \leq \mathbf{E}[f(U_1)]^2$.

c) Comparer les variances de M_{2n} et de \tilde{M}_{2n} .

d) Finalement, quelle valeur choisiriez-vous entre $M_{2n}(\omega)$ ou $\tilde{M}_{2n}(\omega)$ pour approximer m .

5) En utilisant le Théorème Limite Central, proposer un intervalle de confiance pour m de niveau 95% (en négligeant l'erreur due à l'approximation gaussienne) en supposant que l'on connaît un majorant M de $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

Ex 2. *Simulation de loi de Poisson*

On simule des variables aléatoires U_i indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0, 1]$. On définit $M_n := \prod_{i=1}^n U_i$ pour tout entier $n \geq 1$.

1) Montrer que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0.

2) On définit la variable aléatoire

$$Y := \inf \{n \in \mathbb{N} : M_{n+1} < e^{-\alpha}\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Montrer que Y est finie presque sûrement et donner sa loi.

3) En déduire le nombre moyen de variables uniformes nécessaires pour simuler une variable aléatoire de même loi que Y ?

4) On veut simuler un échantillon de 400 variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre 4. A l'aide du Théorème Limite Central, construire un intervalle de confiance du nombre total de variables uniformes simulées de niveau au moins égal à 99%.

Ex 3. *Simulation de loi de Weibull*

Les lois de Weibull sont très utilisées en fiabilité. La loi $\text{Weib}(a, b, c)$ de paramètres $a > 0$, $b \geq 0$ et $c > 0$ est caractérisée par sa fonction de survie donnée par

$$G_{a,b,c}(x) = \exp\left(-\left(\frac{x-b}{c}\right)^a\right), \text{ pour } x \geq b.$$

1) La loi de Weibull $\text{Weib}(a) = \text{Weib}(a, 0, 1)$ a pour fonction de survie

$$G_a(x) = \exp(-x^a), \text{ pour } x \geq 0.$$

Expliquer comment simuler une telle loi par la méthode d'inversion de la fonction de répartition.

2) Comment en déduire une simulation d'une loi de Weibull $\text{Weib}(a, b, c)$ de paramètres $a > 0$, $b \geq 0$ et $c > 0$?

Ex 4. On cherche à simuler une variable aléatoire X dont la densité f sur \mathbb{R} est définie par

$$f(x) = x\mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[1,2]}(x).$$

1) Expliquer comment simuler X en utilisant la méthode par inversion de la fonction de répartition .

2) Expliquer comment simuler X en utilisant la méthode de rejet à partir de la loi uniforme sur $[0, 2]$.

3) Soit Y et Z des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme respectivement sur $[0, 1]$ et sur $[0, 2]$. Quelle est la densité de $S = \max(Y, Z)$. En déduire une autre méthode de simulation de X .

Ex 5. *Simulation d'une loi uniforme sur le disque unité*

Expliquer comment on peut simuler une loi uniforme sur le disque unité D (en précisant le nombre moyen d'appel au générateur). Que se passe-t-il en dimension supérieure ?
Indication : Le volume V_d de la boule unité euclidienne de \mathbb{R}^d est donné par

$$V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)},$$

où la fonction Γ est définie sur $]0, +\infty[$ par $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t} dt$.