IS-Math314 **Année 2005-2006**

Fiche n° 3

Ex 1. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et indentiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$. On définit la variable aléatoire Z_n par $Z_n = n\min(X_1,\dots,X_n)$. Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on déterminera la loi.

Ex 2. *Central téléphonique*

Un central téléphonique dessert 5 000 abonnés. À un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 2 % d'utiliser son téléphone et les appels des abonnés sont supposés indépendants. Quel nombre minimal d'appels doit pouvoir traiter simultanément le central pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2,5 % ?

Ex 3. *Loi de Poisson de grand paramètre*

Soit Y_n une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $n\alpha$, $\alpha > 0$.

1) Montrer que

$$Y_n^* := \frac{Y_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} Z,$$

où Z est n'importe quelle v.a. de loi $\mathfrak{N}(0,1)$.

2) Exprimer $P(Y_n \le n)$ pour $\alpha = 1$. Puis montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Indications : on rappelle que si X et Y sont deux v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs α et β, $X+Y$ suit encore une loi de Poisson, de paramètre $\alpha+\beta$. D'autre part, l'espérance et la variance d'une loi de Poisson ont une expression simple en fonction du paramètre…

Ex 4. *Cumul d'erreurs*

Un programme de calcul utilise J chiffres significatifs après la virgule et arrondit tous les résultats d'opérations à ce format (donc à $\frac{1}{2}\times 10^{-J}$ près). On suppose qu'il effectue 10^6 opérations élémentaires successives, que les erreurs commises pour chacune sont indépendantes, de loi uniforme sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}\times 10^{-J}; \frac{1}{2}\times 10^{-J}]$ et que l'erreur sur le résultat final est la somme des erreurs commises sur chaque opération. Evaluer la probabilité pour que l'erreur finale soit inférieure ou égale (en valeur absolue) à $\frac{1}{2}\times 10^{-J+3}$.

Ex 5. *Surcharge au décollage*

Un avion a une charge maximum au décollage (hors kérosène) de 25 tonnes. Il embarque 318 personnes et leurs bagages (équipage compris). La masse X_i du i^{e} individu embarqué est une v.a. d'espérance 65 kg et d'écart-type 10 kg. La masse de ses bagages est une v.a. Y_i d'espérance 12 kg et d'écart-type 2 kg.

1) Évaluez la probabilité d'une surcharge au décollage en précisant les hypothèses d'indépendance que vous serez amenés à utiliser.

2) On rappelle que la somme de deux v.a. indépendantes Z_1 et Z_2 de lois gaussiennes respectives $\mathfrak{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathfrak{N}(m_2, \sigma_2)$ est encore une v.a. gaussienne. Déterminez ses paramètres.

3) La charge maximale de 25 tonnes a été déterminée en tenant compte d'une masse volumique moyenne du kérosène de 0,8 kg/l. En réalité la masse volumique du kérosène peut varier entre 0,755 kg/l et 0,845 kg/l. Du fait des avitaillements successifs d'un aéroport à l'autre, il est impossible de prévoir assez à l'avance la masse volumique du kérosène embarqué pour un vol donné. On est donc amené à modéliser cette masse volumique par une variable aléatoire gaussienne d'espérance 0,8 kg/l et d'écart-type 0,011 kg/l. Commentez ce choix.

4) Les données techniques concernant l'avion sont les suivantes. Masse maximale au décollage 269 tonnes, masse à vide 120 tonnes, volume des réservoirs de kérosène 152 500 litres. En supposant que la densité du kérosène et la masse des personnes embarquées et de leurs bagages sont indépendantes, recalculez la probabilité de surcharge au décollage.

Ex 6. On effectue un sondage auprés d'un échantillon de 930 personnes représentatif de la population française agée de 18 ans et plus. Il indique que 484 d'entre elles vont voter pour A (au deuxième tour d'une élection présidentielle). Donner un intervalle de confiance de niveau au moins égal à 95% pour la proportion d'électeurs votant pour A, en utilisant,

1) l'inégalité de Tchebytchev,

2) une amélioration de l'inégalité de Tchbytchev (obtenue à l'aide de l'inégalité de Chernoff) : si S_n est une variable aléatoire de loi binomiale $\mathrm{Bin}(n, p)$ alors

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \epsilon\right) \leq 2\exp(-2n\epsilon^2).$$

3) le théorème de De Moivre- Laplace.

Ex 7. Pour déterminer la concentration d'un certain produit dans une solution, on effectue des dosages à l'aide d'une technique expérimentale donnée. On admet que le résultat de chaque dosage est une variable aléatoire normale dont l'espérance m est la valeur que l'on cherche à déterminer et dont l'écart-type est égal à $0,05$ mg/l. Six dosages indépendants d'une solution de concentration inconnue ont été effectués. Les résultats suivants ont été obtenus :

$$2,97 \quad 3,01 \quad 2,98 \quad 2,94 \quad 3,03 \quad 2,95 \quad \text{mg/l.}$$

Donner un intervalle de confiance de la concentration cherchée de niveau 95%.

Entraînement supplémentaire facultatif :

Ex 8. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que X_n ait pour loi une loi uniforme sur l'ensemble fini

$$A_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}.$$

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on déterminera la loi.

Ex 9. *Un modèle simple pour le mélange de deux gaz*
Un récipient hermétique de 2 litres est séparé en deux parties symétriques « gauche » et « droite » par une cloison hermétique munie d'une vanne à large ouverture. La vanne étant fermée, la partie gauche du récipient contient au départ 1 litre d'oxygène et sa partie droite 1 litre d'azote le tout à la pression atmosphérique. On ouvre la vanne de la cloison intermédiaire et on laisse s'effectuer le mélange, puis au bout d'un temps suffisant on ferme la vanne. On mesure alors la proportion d'azote et d'oxygène dans la partie gauche et on constate *expérimentalement* qu'elles sont égales. Le but de cet exercice est l'étude d'un modèle simple permettant de prévoir ce phénomène.

Les molécules étant agitées d'un mouvement incessant, on suppose qu'après fermeture de la vanne, chaque molécule a une probabilité 1/2 de se trouver dans la partie gauche du récipient. On dispose de n molécules d'oxygène et n d'azote. On indexe les molécules d'oxygène de 1 à n et celles d'azote de $n+1$ à $2n$. On note X_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement *la i-ème molécule se trouve dans la partie gauche après fermeture de la vanne.* On suppose les X_i *indépendantes.* On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad T_n = \sum_{i=n+1}^{2n} X_i.$$

La variable S_n est donc le nombre aléatoire de molécules d'oxygène et T_n celui des molécules d'azotes dans la partie gauche après fermeture.

1) Quelle est la loi exacte de S_n, son espérance et sa variance (en fonction de n) ? On a clairement les mêmes résultats pour T_n.

2) Soit $x > 0$ un nombre fixé. On considère l'événement

$$A = \left\{ \frac{n}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{n} \le S_n \le \frac{n}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{n} \right\}.$$

En utilisant le théorème de De Moivre-Laplace, montrer que l'on peut approximer $P(A)$ par $2\Phi(x) - 1$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On a bien sûr le même résultat pour $P(B)$, avec

$$B = \left\{ \frac{n}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{n} \le T_n \le \frac{n}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{n} \right\}.$$

3) On suppose désormais que $n - x\sqrt{n} > 0$. On s'intéresse à l'événement

$$C = \left\{ \frac{n - x\sqrt{n}}{n + x\sqrt{n}} \le \frac{T_n}{S_n} \le \frac{n + x\sqrt{n}}{n - x\sqrt{n}} \right\}.$$

Montrer que $A \cap B \subset C$.

4) En négligeant l'erreur due à l'approximation gaussienne, proposer à l'aide de $\Phi(x)$ une majoration de $P(A^c \cup B^c)$. En déduire une *minoration* de $P(C)$. On exprimera simplement le résultat final en fonction de la quantité $R(x) = (1 - \Phi(x))$.

5) Application numérique : $n = 10^{22}$, $x = 10$. On utilisera la formule d'encadrement de $1 - \Phi(x)$ pour les « très grandes valeurs de x » fournie à la fin des tables. Commentez le résultat obtenu.

Ex 10. On sait que , à chaque naissance, la probabilité p d'observer un garçon est proche de $1/2$. Pour estimer précisément cette probabilité, on cherche un intervalle de confiance pour p avec un coefficient de sécurité de 99%, à partir de la proportion observée sur n naissances. Quelle valeur faut-il donner à n pour avoir une estimation à $0,001$ près.

Ex 11. Un lac contient un très grand nombre de poissons. On en pêche 900, parmi lesquels 180 sont porteurs de parasites. Donner un intervalle de confiance pour la proportion de poissons parasités dans le lac.