Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS-Math314 **Année 2005-2006**

Fiche n° 1

Ex 1. Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ admettant la densité de probabilité

$$f(x_1, x_2) = \frac{4}{\pi} \exp\left(-(x_1^2 - 6x_1x_2 + 25x_2^2)\right).$$

1) Quelles sont les densités marginales de (X_1, X_2) ? Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

2) Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. On définit un nouveau vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ par $(Y_1, Y_2) := (aX_1 + bX_2, X_2)$. Ce vecteur admet-il une densité, et si oui, laquelle ?

Ex 2. *Covariances d'une loi multinomiale*[1]
On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes, chaque épreuve ayant k résultats possibles $r_1, \dots, r_k$. On note p_i la probabilité de réalisation du résultat r_i lors d'une épreuve donnée. Par exemple si on lance n fois un dé, $k = 6$ et $p_i = 1/6$ pour $1 \leq i \leq 6$. Pour $1 \leq i \leq k$, notons X_i le nombre de réalisations du résultat r_i au cours des n épreuves.

1) Expliquer sans calcul pourquoi $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_k) = 0$.

2) Quelle est la loi de X_i ? Que vaut sa variance ?

3) Pour $i \neq j$, donner la loi et la variance de $X_i + X_j$.

4) En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

5) Contrôler ce résultat en développant $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_k)$ et en utilisant la première question.

Ex 3. *Inégalité de Chernoff.*

1) Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que pour un certain $a > 0$, $\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{aX}\big)$ soit finie. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(X \geq t) \leq \mathrm{e}^{-at}\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{aX}\big). \tag{1}$$

2) Cette inégalité s'appelle *inégalité de Chernoff*. Dans les cas où l'on sait calculer explicitement $\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{aX}\big)$, on peut alors chercher à améliorer cette majoration en optimisant le majorant $M(a) := \mathrm{e}^{-at}\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{aX}\big)$ en a. Faut-il chercher à minimiser ou à maximiser $M(a)$?

[1] Il n'est pas nécessaire de connaître la loi multinomiale pour pouvoir faire cet exercice.

Ex 4. Dans cet exercice, $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi et on note F la f.d.r. de X_1. On pose

$$M_n := \max_{1 \le i \le n} X_i.$$

1) Exprimer à l'aide de F la f.d.r. H_n de M_n.

2) Montrer que si F est C^1, M_n a une densité que l'on peut exprimer en fonction de F.

3) On suppose dans toute la suite que les X_i sont positives et qu'il existe un réel b vérifiant

$$F(b) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x < b,\ F(x) < 1. \tag{2}$$

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(b - \varepsilon < M_n \le b) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1. \tag{3}$$

4) On suppose désormais que chaque X_i est à valeurs dans $[0, b]$ (est-ce une grande restriction par rapport à la question précédente ?). Alors pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(M_n(\omega))_{n \ge 1}$ est croissante et majorée par b, donc converge dans $\mathbb{R}_+$ vers un réel $M(\omega) \le b$. On définit ainsi une variable aléatoire positive M. Montrer que $\mathbf{E}M = b$.

5) Montrer que $P(M = b) = 1$.

Ex 5. *Convergence en probabilité et opérations*
Soient $(X_n)_{n \ge 1}$, $(Y_n)_{n \ge 1}$, X et Y des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On suppose que X_n et Y_n convergent en probabilité vers X et Y respectivement.

1) Montrer que $X_n + Y_n$ converge en probabilité vers $X + Y$.

2) Montrer que $X_n Y_n$ converge en probabilité vers XY.
Indication. Commencer par montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe un réel c et un entier n_0 tels que pour tout $n \ge n_0$, $P(|Y_n| > c) < \delta$.

Ex 6. *Convergence presque sûre*
Soient $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux suites de v.a. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers une v.a. X et que $(Y_n)_n$ converge presque sûrement vers une v.a. Y.

1) Montrer que la suite des sommes $(X_n + Y_n)_n$ converge presque sûrement vers la somme des limites $X + Y$.

2) Montrer que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, la suite $(f(X_n))_n$ converge presque sûrement vers la v.a. $f(X)$.

Entraînement supplémentaire facultatif :

Ex 7. *Somme d'une v.a. discrète et d'une v.a. à densité*

1) Sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on définit une v.a. N à valeurs dans $\mathbb{N}$ et une v.a. U de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $X = N + U$. Montrer que la fonction de répartition de X est *continue* sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose *de plus* que N et U sont *indépendantes*. Montrer que la f.d.r. de X est affine par morceaux (plus précisément, affine sur chaque $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, avec raccords continus) et que X est à densité[2].

Ex 8. *Contrôle de la queue gaussienne*
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathfrak{N}(0,1)$

1) Calculer $\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{aX}\big)$ pour $a > 0$. En optimisant l'inégalité (1), Ex. 3 par rapport à a pour $t > 0$ fixé, en déduire une majoration de $P(X \geq t)$.

2) On cherche à améliorer la majoration trouvée en 1). Par une étude de fonction, déterminer

$$\sup_{t>0} \left\{ P(X \geq t) - \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \right\}.$$

3) En déduire une nouvelle majoration de $P(X \geq t)$ pour $t > 0$. Est-elle meilleure que celle trouvée en 1) ?

4) Déterminer

$$\sup_{t>0} \left\{ P(X \geq t) \mathrm{e}^{t^2/2} \right\}.$$

En déduire une troisième majoration de $P(X \geq t)$ pour $t > 0$ et la comparer à celle trouvée en 1).
Indication. On pourra étudier les variations de $h(t) = P(X \geq t)\mathrm{e}^{t^2/2}$ en se servant du résultat de 3).

[2] La proposition 3.24 page 98 du poly ne peut s'appliquer ici, car la fonction de répartition de X n'est *a priori* dérivable que sur $\mathbb{R}$ privé d'une infinité de points. On admettra cependant que la proposition 3.24 se généralise au cas où l'ensemble fini des points de discontinuité de F' est remplacé par un ensemble dénombrable ne présentant pas de point d'accumulation.