Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math314 **Année 2005-2006**

Devoir n°2

à rendre en TD (ou dans le casier de votre enseignante) la semaine du 01 mai 2006.

Ce sujet est extrait du sujet d'examen de juin 2005 (deuxième session).

Ex 1. *Comportement asymptotique de variables de loi* $\chi^2(n)$

On rappelle que si X suit la loi gaussienne $\mathfrak{N}(m,\sigma)$, $\mathbf{E}X = m$ et $\operatorname{Var} X = \sigma^2$. Dans tout l'exercice, on considère une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathfrak{N}(0,1)$. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$Z_n := \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

On sait qu'alors Z_n suit la loi $\chi^2(n)$.

1) Dans cette question, X est une v.a. de loi $\mathfrak{N}(0,1)$.

1.a) Expliquez pourquoi X a des moments de tout ordre.

1.b) Que valent les $\mathbf{E}(X^{2n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$?

1.c) On pose $c_n := \mathbf{E}(X^{2n})$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrez en intégrant par parties que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{2n+1} c_{n+1}.$$

1.d) En déduire une formule explicite pour c_n et calculez $\mathbf{E}(X^4)$.

2) En justifiant votre réponse, calculez $\mathbf{E}Z_n$ et $\operatorname{Var} Z_n$.

3) Quel est le comportement de la suite de v.a. $(n^{-1}Z_n)_{n\geq 1}$ quand n tend vers $+\infty$?

4) Justifiez la convergence

$$\frac{Z_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} Z, \tag{1}$$

où Z suit la loi $\mathfrak{N}(0,1)$.

5) On note Y une variable gaussienne de loi $\mathfrak{N}(0, 2^{-1/2})$. Prouvez la convergence

$$\sqrt{Z_n} - \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} Y. \tag{2}$$

Indication. On peut commencer par remarquer que Z_n étant une v.a. positive, $Z_n = (\sqrt{Z_n})^2$, d'où

$$\sqrt{Z_n} - \sqrt{n} = \frac{Z_n - n}{\sqrt{Z_n} + \sqrt{n}}.$$

On pourra alors exploiter les deux questions précédentes et le lemme de Slutsky.

Ex 2. *Estimation du paramètre d'une loi exponentielle*

1) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathrm{Exp}(\theta)$, de densité $f_\theta : x \mapsto \theta \mathrm{e}^{-\theta x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, où $\theta \in]0, +\infty[$. Vérifiez que

$$\mathbf{E} X = \frac{1}{\theta}, \qquad \mathrm{Var}\, X = \frac{1}{\theta^2}.$$

2) On se propose d'estimer le paramètre $\theta > 0$ d'une loi exponentielle $\mathrm{Exp}(\theta)$, au vu d'un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de grande taille. Plus précisément, on considère que les X_i sont des variables aléatoires *strictement* positives, définies sur un modèle statistique $(\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta)_{\theta \in]0,+\infty[})$ et sont pour tout $\theta \in]0, +\infty[$, P_θ-indépendantes et de même loi $\mathrm{Exp}(\theta)$ sous P_θ. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad T_n := \frac{n}{S_n}.$$

Montrez que T_n converge presque surement vers θ (on dit que T_n est un estimateur fortement consistant de θ).

3) Est-ce que $\mathbf{E}(T_n) = \theta$ (si tel est le cas, on dit que l'estimateur T_n est sans biais) ? Vous pouvez justifiez votre réponse en examinant le cas $n = 1$.

4) Justifiez la convergence suivante, où Z désigne une v.a. gaussienne de loi $\mathfrak{N}(0, 1)$:

$$\frac{\theta S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{loi}} Z. \tag{3}$$

5) En déduire un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 0,95, en négligeant l'erreur due à l'approximation gaussienne. Application numérique avec $n = 400$ et $S_{400}(\omega) = 1\ 460$.