Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPÉ Math306 **Année 2005-2006**

Examen 1re session

10 janvier 2006, durée 3 heures.

Documents autorisés : polycopié du cours IPÉ (Math306). Calculatrices autorisées.

Ce sujet comporte **4 pages** dont 1 figure. Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.

Ex 1. *Échauffement graphique (4 points)*

La variable aléatoire X a pour fonction de répartition F dont le graphe est représenté par la figure 1.

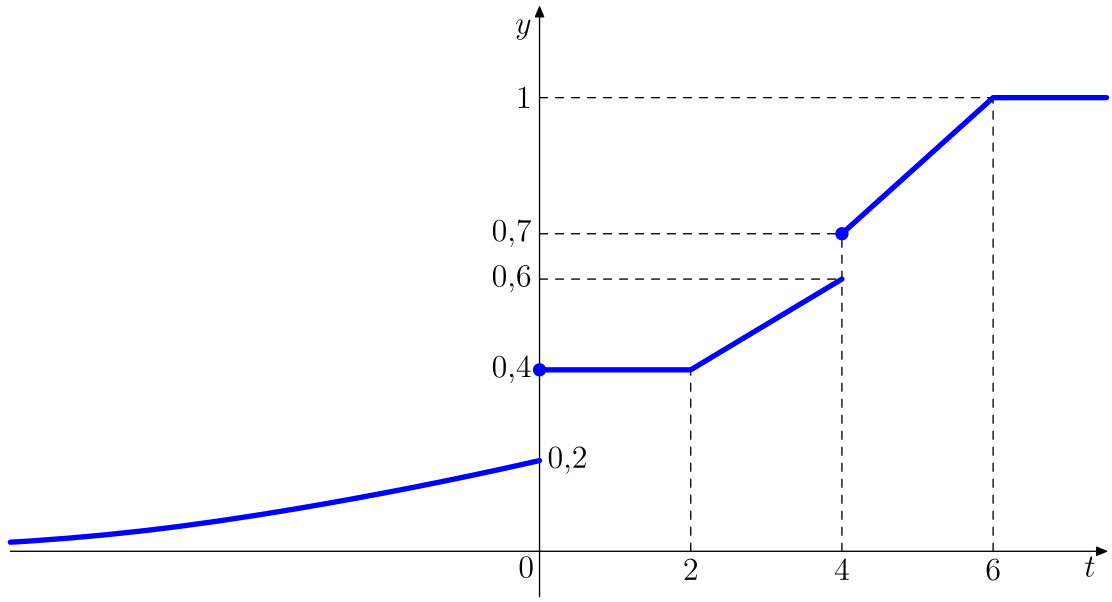

Fig. 1 – Fonction de répartition F

1) Donner les valeurs des probabilités suivantes.

$$P(X=0), \quad P(X \geq 0), \quad P(4 \leq X \leq 6), \quad P(0 < X < 4), \quad P(X \geq 6).$$

2) Calculer $\mathbf{E}(X^+)$.

Ex 2. *La formule de Poincaré (6 points)*

La formule de Poincaré vue en cours a été démontrée par récurrence. Le but de cet exercice est d'en proposer une autre démonstration basée sur les propriétés de l'espérance.

1) Nous aurons besoin de la formule algébrique suivante où $x_1, \dots, x_n$ sont des nombres réels quelconques ($n \geq 2$).

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{\operatorname{card} I} \prod_{i \in I} x_i. \tag{1}$$

Dans cette formule la collection de tous les sous-ensembles I de $\{1, \dots, n\}$ qui indexe le $\sum$ comprend en particulier $I = \emptyset$ pour lequel on pose par convention $\prod_{i\in\emptyset} x_i := 1$.

a) Vérifiez directement cette formule dans le cas $n = 3$ en développant le produit $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$.

b) Démontrez la formule (1).

2) Dans toute la suite, on travaille sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ fixé. On rappelle que si A est un sous-ensemble de Ω, sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ est l'application $\Omega \to \{0, 1\}$ définie par

$$\mathbf{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

Soient $B_1, \dots, B_k$, k sous-ensembles de Ω. Vérifiez l'égalité

$$\mathbf{1}_B = \prod_{j=1}^{k} \mathbf{1}_{B_j}, \quad \text{où } B := \bigcap_{j=1}^{k} B_j. \tag{2}$$

3) Montrez que pour tout entier $n > 1$ et toute suite finie $A_1, \dots A_n$ dans $\mathcal{F}$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbf{1}_{A_i})\right). \tag{3}$$

4) En utilisant tout ce qui précède, établir la formule de Poincaré, à savoir

$$\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}, \qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{1+\operatorname{card} I} P\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big). \tag{4}$$

Indiquez clairement quelles propriétés de l'espérance mathématique sont utilisées dans cette démonstration.

Ex 3. *Espérance du min et du max de deux v.a. uniformes (4 points)*

Soient X et Y deux variables aléatoires *positives* définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, toutes deux de loi uniforme sur $[0, 1]$. Sauf dans la dernière question, on ne suppose pas X et Y indépendantes. On s'intéresse à l'espérance des variables aléatoires $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$.

1) Calculez $\mathbf{E}X$ et $\mathbf{E}(X^2)$.

2) Écrivez plus simplement la somme $\min(X, Y) + \max(X, Y)$ et en déduire une relation simple entre $\mathbf{E}\min(X, Y)$ et $\mathbf{E}\max(X, Y)$. En déduire l'expression de $\mathbf{E}|X - Y|$ en fonction de $\mathbf{E}\min(X, Y)$, puis en fonction de $\mathbf{E}\max(X, Y)$.

3) Montrez (en deux lignes maximum) que l'on a toujours

$$\mathbf{E}\min(X, Y) \leq \frac{1}{2} \leq \mathbf{E}\max(X, Y).$$

Est-il possible avec un choix convenable de X et Y que ces deux inégalités soient des égalités ?

4) On suppose maintenant que X et Y sont indépendantes, ce qui implique notamment que pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$ les évènements $\{X \in I\}$ et $\{Y \in J\}$ sont indépendants. Calculez $\mathbf{E}\min(X, Y)$, $\mathbf{E}\max(X, Y)$ et en déduire $\mathbf{E}|X - Y|$.
Indication : on pourra commencer par calculer $P(\min(X, Y) > t)$ ou $P(\max(X, Y) \leq t)$.

Ex 4. *Espérance des statistiques d'ordre (8 points)*

1) *Question préliminaire.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $j = 0, 1, \ldots, n$, on pose

$$I_{j,n} := \int_0^1 t^j (1-t)^{n-j} \, \mathrm{d}t.$$

Calculez $I_{n,n}$ et justifiez la relation : $\forall j = 0, \ldots, n-1, \quad I_{j,n} = \dfrac{n-j}{j+1} I_{j+1,n}$. En déduire que

$$I_{j,n} = \frac{j!(n-j)!}{(n+1)!}.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on note $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires *positives*, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *indépendantes et de même loi*, donc de même fonction de répartition notée F. Le but de ce problème est de calculer l'espérance des variables aléatoires $X_{n:1}, \ldots X_{n:n}$ obtenues par réarrangement croissant de $X_1, \ldots, X_n$ et appelées *statistiques d'ordre*. Plus précisément, pour tout $\omega \in \Omega$, on a *l'égalité des ensembles* $\{X_{n:k}(\omega);\ k = 1, \ldots, n\}$ et $\{X_k(\omega);\ k = 1, \ldots, n\}$ et de plus

$$\forall k = 1, \ldots, n-1, \quad X_{n:k}(\omega) \leq X_{n:k+1}(\omega).$$

En particulier, $X_{n:1} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $X_{n:n} = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Pour illustrer cette définition, on vous montre ci-dessous les valeurs des statistiques d'ordre pour $n = 5$ déterminées à partir des valeurs prises par la suite des $X_i(\omega)$ pour ω et ω' différents.

k	1	2	3	4	5
$X_k(\omega)$	2,7	0,3	6	1,2	0,9
$X_{5:k}(\omega)$	0,3	0,9	1,2	2,7	6

k	1	2	3	4	5
$X_k(\omega')$	4,1	0,7	8,3	0,7	0,2
$X_{5:k}(\omega')$	0,2	0,7	0,7	4,1	8,3

Noter que la présence d'*ex-æquo* ne pose pas de problème.

2) Soit I une partie non vide de $\{1,\dots,n\}$. En exploitant les hypothèses faites sur les X_i, exprimez à l'aide de $F(x)$, n et $\operatorname{card} I$ la probabilité

$$p_I(x) := P(\forall i \in I,\ X_i \le x \text{ et } \forall i \in \{1,\dots,n\} \setminus I,\ X_i > x).$$

3) On note F_k la fonction de répartition de la variable aléatoire positive $X_{n:k}$. Montrez que

$$\forall x \ge 0, \quad F_k(x) = P\bigl(X_{n:k} \le x\bigr) = \sum_{j=k}^{n} C_n^j F(x)^j \bigl(1 - F(x)\bigr)^{n-j}. \tag{5}$$

Indication : commencez par remarquer que « $X_{n:k} \le x$ » est équivalent à « au moins k parmi les X_i sont inférieurs ou égaux à x ».

4) Expliquez comment déduire de (5) la formule

$$\forall x \ge 0, \quad 1 - F_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j F(x)^j \bigl(1 - F(x)\bigr)^{n-j}. \tag{6}$$

En déduire une formule générale exprimant $\mathbf{E}X_{n:k}$ à l'aide d'intégrales où intervient la fonction F.

5) On suppose dans cette question que les X_i suivent la loi uniforme sur $[0,1]$.

a) Explicitez alors $F(x)$ et achevez le calcul de $\mathbf{E}X_{n:k}$.

b) On pose de plus $X_{n:0} := 0$ et $X_{n:n+1} := 1$ et $Y_{n,k} := X_{n:k+1} - X_{n:k}$. Les variables aléatoires $Y_{n,k}$, $k = 0,\dots,n$ sont appelées les *espacements*. Que valent les $\mathbf{E}Y_{n,k}$?

6) On suppose dans cette question que les X_i suivent la loi exponentielle de paramètre 1. On a donc pour tout $x \ge 0$, $P(X_i > x) = \mathrm{e}^{-x}$. Calculez les $\mathbf{E}X_{n:k}$.

7) Montrez que si la variable aléatoire positive X_1 est *intégrable*, alors chacune des v.a. positives $X_{n:k}$ l'est aussi.

8) On suppose dans cette question que F est C^1 sur $[0,+\infty[$, avec $F(0) = 0$ et on note f sa dérivée. Montrez qu'alors $X_{n:k}$ admet pour densité la fonction f_k nulle sur $]-\infty,0[$ et vérifiant

$$\forall x > 0, \quad f_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F(x)^{k-1} \bigl(1 - F(x)\bigr)^{n-k} f(x).$$

Indication : commencez par vérifier les formules

$$jC_n^j = nC_{n-1}^{j-1}, \qquad (n-j)C_n^j = nC_{n-1}^j.$$