Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPÉ Math306 **Année 2005-2006**

Examen 2e session

24 février 2006, durée 3 heures.

Documents autorisés : polycopié du cours IPÉ (Math306). Calculatrices autorisées.

Ce sujet comporte **2 pages**. Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.

Ex 1. *Une inégalité de Markov à deux variables (4 points)*

Dans tout l'exercice, X et Y sont deux variables aléatoires positives définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1) Montrez que

$$\forall s > 0,\ \forall t > 0, \qquad P(X > s \text{ et } Y > t) \le \frac{1}{st}\mathbf{E}(XY). \tag{1}$$

Indication : on pourra utiliser après l'avoir soigneusement justifiée, l'inégalité

$$st\mathbf{1}_{\{X>s \text{ et } Y>t\}} \le XY. \tag{2}$$

2) On suppose de plus que $c := \mathbf{E}(XY) < +\infty$. Pour quelles valeurs de (s,t), l'inégalité (1) a-t-elle un intérêt ? Représentez graphiquement l'ensemble de ces valeurs de (s,t).

3) On suppose maintenant que X et Y sont indépendantes. Expliquez comment on peut dans ce cas retrouver (1) en utilisant l'inégalité de Markov classique.

Ex 2. *Urne à composition évolutive (7 points)*

Dans une urne contenant au départ une boule verte et une rouge on effectue une suite de tirages d'une boule selon la procédure suivante. Chaque fois que l'on tire une boule verte, on la remet dans l'urne *en y rajoutant une boule rouge*. Si l'on tire une boule rouge, on arrête les tirages. On désigne par T le nombre de tirages effectués par cette procédure. On notera V_i (resp. R_i) l'événement *obtention d'une boule verte au ième tirage* (resp. *rouge*).

1) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donnez une expression de l'événement $\{T = k\}$ à l'aide des événements V_i $(1 \le i \le k-1)$ et R_k.

2) Que vaut $P(V_n \mid V_1 \cap \ldots \cap V_{n-1})$ pour $n \ge 2$?

3) Déterminez la loi de T.

4) Calculez $\mathbf{E}T$.

5) Calculez l'espérance de la variable aléatoire $\frac{1}{T}$.

6) On recommence l'expérience en changeant la procédure : à chaque tirage d'une boule verte on la remet dans l'urne *en y rajoutant une boule verte*. Comme précédemment, on interrompt les tirages à la première apparition d'une boule rouge. Soit S le nombre de tirages effectués suivant cette nouvelle procédure. Déterminez la loi de S. Que peut-on dire de l'espérance de S ? Interprétez.

Ex 3. *Calcul de moments d'une v.a. positive (4 points)*

1) Montrez que pour toute v.a. positive X et tout réel $a > 0$, on a

$$\mathbf{E}(X^a) = \int_0^{+\infty} at^{a-1} P(X > t)\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

L'intérêt de cette formule est qu'elle peut permettre de calculer les moments de v.a. positives qui ne sont ni discrètes ni à densité.

2) Soient $c > 0$ une constante et Y une v.a. positive de fonction de survie G, $G(t) = P(Y > t)$. On pose $X := \min(Y, c)$. Pourquoi X^a est-elle intégrable pour tout $a > 0$? Exprimez à l'aide de G et c la fonction de survie de X et en déduire une formule générale pour $\mathbf{E}(X^a)$.

3) On suppose dans cette question que $c > 1$ et que Y est une v.a. positive qui suit la loi de Pareto de densité f donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{p}{t^{p+1}} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t),$$

où $p > 0$ est un paramètre. Calculez $\mathbf{E}(X^a)$ en fonction de a, c et p.

Ex 4. *Loi de Gumbel*

On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \exp\big(-\mathrm{e}^{-ax}\big)$, où $a > 0$ est une constante.

1) Vérifiez que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$. Cette loi s'appelle *loi de Gumbel de paramètre* a.

2) Expliquez pourquoi cette loi admet une densité f et calculez f.

3) Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi de Gumbel. Pour toute constante réelle b, $Y := \mathrm{e}^{bX}$ est une v.a. positive. Exprimez l'espérance de Y comme une intégrale généralisée dont vous donnerez l'expression à l'aide de l'intégrale généralisée plus simple $\int_0^{+\infty} u^{s-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$. On rappelle que cette dernière définit $\Gamma(s)$ pour $s > 0$. Pour quelles valeurs de b, la v.a. Y est-elle intégrable ?

4) Soient $X_1, \dots, X_n, \dots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Gumbel de paramètre a. On pose

$$M_n := \max_{1 \le k \le n} X_k.$$

Montrez que M_n a même loi que $X_1 + c_n$, où les c_n sont des constantes que l'on calculera. *Indication :* commencez par calculer la fonction de répartition de M_n et constatez qu'elle s'exprime très simplement à l'aide de F.