Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math314 **Année 2010**

Examen 2^e^ session, 24 juin 2010, durée 3 heures.

- Ce sujet comporte **3 pages**, dont 3 tables statistiques.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours IPE, polycopié du cours d'IS, dictionnaire bilingue pour étudiants étrangers.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. *(3 points)*

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et de même loi. Montrez que

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{1+|X_k|}$$

converge presque-sûrement quand n tend vers l'infini vers une constante $c \in [-1, 1]$.

Ex 2. *(5 points)*

On considère la variable aléatoire X (non p.s. constante) et une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On suppose de plus que X est de carré intégrable et que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 \text{ a même loi que } X. \tag{1}$$

Le but de cet exercice est de montrer que ces propriétés caractérisent une loi classique.

1) Montrez que nécessairement, $\mathbf{E}X = 0$.

2) Expliquez pourquoi

$$T_n := 2^{-n/2}\sum_{k=1}^{2^n} X_k$$

a même loi que X.

3) On pose $\sigma^2 = \mathbf{E}X^2$, $\sigma > 0$. Montrez que $\sigma^{-1}T_n$ converge en loi et précisez la loi limite. Même question pour T_n.

4) Quelle est la loi de X ?

Ex 3. *(6 points)*

1) Soit X un v.a. gaussienne $\mathfrak{N}(0,1)$. On note $m_n := \mathbf{E}(X^n)$. Que vaut m_2 ? Donnez une relation de récurrence entre m_{2k} et m_{2k-2} et utilisez la pour calculer m_4.

2) Y étant une autre v.a. gaussienne $\mathfrak{N}(0,1)$ indépendante de X, on forme les vecteurs aléatoires :

$$U = (X, 1-X), \quad V = (X, 1-Y), \quad W = (X^2, Y).$$

Pour chacun de ces vecteurs, indiquez s'il est gaussien (en justifiant votre réponse), puis calculez son espérance et sa matrice de covariance.

Ex 4. *Confetti et intervalles de confiance (6 points)*

Une papeterie recycle ses déchets en produisant des sachets de confetti de 400 g. Pour contrôler le bon fonctionnement de l'appareil d'ensachage, on prélève 100 sachets au hasard dont on pèse le contenu. Les résultats $x_1, \dots, x_{100}$ sont donnés dans le tableau ci-dessous. On note X la variable aléatoire masse de confetti dans un sachet choisi au hasard et on se propose de trouver des intervalles de confiance pour son espérance et son écart-type.

398,975	401,189	402,580	394,533	403,042	401,178	392,161	391,980	395,144	394,916
397,998	402,123	402,679	399,861	404,225	398,469	401,301	404,999	396,856	396,508
404,775	393,838	398,206	394,460	397,365	404,590	400,371	404,703	390,627	396,144
393,917	398,413	393,873	401,532	404,973	397,538	397,654	404,079	397,231	397,416
407,462	402,065	397,112	393,488	400,427	401,074	404,925	398,972	391,800	395,842
400,764	400,030	390,582	398,246	396,387	399,187	401,211	395,734	401,686	396,180
394,724	404,169	397,806	403,103	402,988	403,512	402,679	399,362	398,327	401,417
403,723	410,682	400,083	397,590	395,112	401,738	398,921	389,213	398,073	394,359
396,570	409,990	404,526	395,580	400,392	395,928	401,129	402,853	398,893	406,829
399,583	394,850	401,504	392,812	404,799	403,118	402,000	398,315	399,793	403,083

Pour vous éviter des saisies fastidieuses, on vous donne

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 39\ 935{,}724 \text{ g}, \qquad \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 15\ 950\ 411 \text{ g}^2.$$

Pour chacun des intervalles de confiance demandés ci-dessous, vous indiquerez clairement les résultats théoriques sur lesquels vous vous appuyez.

1) Donnez un intervalle de confiance au niveau 95% pour $p = P(|X - 400| > 3)$.

2) Calculez la moyenne empirique et la variance empirique de l'échantillon.

3) Proposez un intervalle de confiance pour $\mathbf{E}X$ au niveau 95%.

4) On suppose maintenant que X a une loi gaussienne. Donnez des intervalles de confiance au niveau 95% pour $\mathbf{E}X$ et pour l'écart-type σ.

Table des valeurs de Φ, f.d.r. de la loi normale standard $\mathfrak{N}(0,1)$ sur l'intervalle $[1,3]$

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \mathrm{d}t, \quad Z \sim \mathfrak{N}(0,1).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Mini table de quantiles du χ^2 : valeurs z_q telles que $P(Z > z_q) = q$ pour Z de loi $\chi^2(d)$

d \ q	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010
99	69,230	73,361	77,046	81,449	117,407	123,225	128,422	134,642
100	70,065	74,222	77,929	82,358	118,498	124,342	129,561	135,807
101	70,901	75,083	78,813	83,267	119,589	125,458	130,700	136,971

Mini table de quantiles de la loi de Student : valeurs u_q telles que $P(U > u_q) = q$ pour U de loi de Student à d degrés de liberté

d \ q	0,100 0	0,050 0	0,025 0	0,010 0	0,005 0
99	1,290 2	1,660 4	1,984 2	2,364 6	2,626 4
100	1,290 1	1,660 2	1,984 0	2,364 2	2,625 9
101	1,290 0	1,660 1	1,983 7	2,363 8	2,625 4