Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2007–2008**

Examen 2$^{\text{e}}$ session, 18 juin 2008, durée 3 heures

- Ce sujet comporte **3 pages**.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours d'IPE, dictionnaire bilingue pour étudiants étrangers.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. *Un problème de tige brisée (6 points)*

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$ et de loi uniforme sur $]0,1[$. On pose

$$Z := \frac{1-X}{X}.$$

1) Calculez explicitement la fonction de répartition de la variable aléatoire positive Z.

2) La loi de Z est-elle à densité ? Si oui, calculez la.

3) Pour quelles valeurs du réel a, la variable aléatoire Z^a est-elle *intégrable* ?

4) Expliquez si possible sans calcul pourquoi Z et $1/Z$ ont *même loi.*

5) On brise une tige de longueur 1 en choisissant au hasard le point de rupture suivant une loi uniforme sur $]0,1[$. On notera X la longueur du morceau gauche. Quelle est la probabilité que l'un des deux morceaux soit plus de deux fois plus long que l'autre ?

Ex 2. *Une v.a. série (7 points)*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé sur lequel existe une suite $(A_k)_{k\geq 1}$ d'évènements indépendants et de même probabilité $p \in]0,1[$. On pose

$$X := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{A_k}}{3^k}.$$

1) Expliquez pourquoi cette formule définit une variable aléatoire positive et bornée.

2) Calculez $\mathbf{E}\,X$ en donnant les justifications utiles.

3) On se propose dans tout ce qui suit de montrer que X a une fonction de répartition continue, ce qui revient à montrer que $P(X = x)$ vaut zéro pour tout $x \in \mathbb{R}$ (pourquoi ?). On introduit à cet effet l'ensemble :

$$D := \left\{ x \in \mathbb{R};\ \exists (c_k)_{k\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}, \quad x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{3^k} \right\},$$

autrement dit, D est l'ensemble des valeurs prises par $X(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$. Que vaut $P(X = x)$ pour $x \notin D$?

4) Vérifiez l'inégalité *stricte* :

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} < \frac{1}{3^n}. \tag{1}$$

5) L'inégalité (1) permet de démontrer *l'unicité* de la suite binaire $(c_k)_{k\geq 1}$ dans la représentation d'un $x \in D$. Pour le voir, raisonnez par l'absurde en supposant qu'il existe deux suites binaires $(b_k)_{k\geq 1}$ et $(c_k)_{k\geq 1}$ distinctes telles que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{3^k},$$

notez n le plus petit entier i tel que $b_i \neq c_i$ et remarquez que pour tout k, $|b_k - c_k|$ a un majorant simple, ...

6) En utilisant l'unicité établie ci-dessus, montrez que pour $x \in D$, $\{X = x\}$ peut s'écrire $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B_k$, les évènements B_k étant indépendants. Trouvez une constante $r \in]0,1[$ telle que pour tout $k \geq 1$, $P(B_k) \leq r$. En déduire *proprement* que $P(X = x) = 0$.

Ex 3. *Deux problèmes de minimisation (7 points)*

Le but de cet exercice est de trouver une constante c qui est « la plus proche » d'une variable aléatoire réelle X, au sens d'une certaine distance. La première question traite le cas de la distance L^2, les questions suivantes celui de la distance L^1. La résolution de cet exercice ne suppose aucune connaissance sur ces distances et n'utilise que les propriétés de la fonction de répartition et de l'espérance.

1) Soit X une variable aléatorie réelle de carré intégrable. On pose pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$g(a) := \mathbf{E}\left((X - a)^2\right).$$

Montrez que g est bien définie sur $\mathbb{R}$ et y admet un minimum unique atteint en un point a_0 que vous calculerez. Que reconnaissez vous en $g(a_0)$?

2) Dans cette question et les suivantes, X est une variable aléatoire intégrable dont la fonction de répartition sera notée F. On pose pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$h(a) := \mathbf{E}\,|X - a|$$

et on cherche quelle(s) valeur(s) de a minimise(nt) $h(a)$. Expliquez pourquoi h est bien définie sur tout $\mathbb{R}$.

3) Donnez une représentation graphique de $\mathbf{E}\,|X-a|$ en utilisant le graphe de F.

4) En revenant à la définition de l'espérance de la variable aléatoire positive $|X-a|$, établissez la formule suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{E}\,|X-a| = \mathbf{E}\,|X| + 2\int_0^a \Big(F(s) - \frac{1}{2}\Big)\,\mathrm{d}s. \tag{2}$$

On pourra commencer par examiner le cas $a > 0$.

5) On rappelle que l'inverse généralisé de la fonction de répartition F est défini sur $]0,1[$ par :

$$\forall u \in]0,1[, \quad F^{-1}(u) := \inf\{t \in \mathbb{R};\ F(t) \geq u\}.$$

On dit d'autre part que le réel m est *une médiane* de X, s'il vérifie les deux conditions $P(X \geq m) \geq 1/2$ et $P(X \leq m) \geq 1/2$. Vérifiez que $F^{-1}(1/2)$ est une médiane de X et que c'est la plus petite de toutes les médianes dans le cas où il y en aurait plusieurs. Pourriez vous proposer un exemple d'un tel cas en donnant F par sa représentation graphique ?

6) En revenant à (2), montrez que h atteint un minimum absolu au point $a = F^{-1}(1/2)$. Ce minimum peut-il être atteint ailleurs ?

7) Question bonus : proposez une résolution graphique de ce problème.