Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math314 **Année 2008**

Examen, 26 mai 2008, durée 3 heures.

- Ce sujet comporte **4 pages**.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours IPE, polycopié du cours d'IS, dictionnaire bilingue pour étudiants étrangers.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. *Échauffement gaussien (3 points)*

Soient X et Y, deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et de même loi gaussienne standard $\mathfrak{N}(0,1)$. On pose $Z := X + Y$.

1) Calculez $\mathrm{Cov}(Z, Y)$ après avoir justifié son existence.

2) Z et Y sont-elles indépendantes ?

3) Le vecteur (Z, Y) est-il gaussien ?

Seules les réponses argumentées seront prises en compte.

Ex 2. *Intervalle de confiance (4 points)*

Dans une verrerie industrielle, une chaîne de production fournit des bouteilles vides. On s'intéresse à la masse moyenne m (en grammes) d'une bouteille produite par cette chaîne. Celle-ci peut s'interpréter comme l'espérance d'une variable aléatoire de loi inconnue. Pour estimer m, on prélève un échantillon de 400 bouteilles que l'on pèse une par une. On obtient ainsi les données numériques x_i $(i = 1\dots, 400)$ où x_i est la masse de la i^{e} bouteille pesée. Pour vous éviter le travail fastidieux d'entrée de ces données dans une calculatrice, on vous fournit les résultats intermédiaires suivants :

$$\sum_{i=1}^{400} x_i = 79\ 882 \text{ g}, \qquad \sum_{i=1}^{400} x_i^2 = 15\ 963\ 824 \text{ g}^2.$$

Proposez un intervalle de confiance au niveau 95% pour m en indiquant clairement les hypothèses faites et les résultats du cours utilisés.

Ex 3. *Un exemple de T.L.C. sans indépendance (7 points)*

Le but de cet exercice est de présenter un exemple de somme de n variables aléatoires non indépendantes ni de même loi, qui avec normalisation $n^{-1/2}$, converge en loi vers une gaussienne.

1) On dit que la variable aléatoire Y est symétrique (ou de loi symétrique) si Y et $-Y$ ont même loi. Montrez simplement que si Y est symétrique et intégrable ($\mathbf{E}|Y| < +\infty$), alors $\mathbf{E}Y = 0$. En déduire que pour toute X variable aléatoire symétrique, $\mathbf{E}(\sin X) = 0$.

Dans toute la suite, $(a_k)_{k\geq 1}$ désigne une suite de nombres réels vérifiant :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1}$$

Notez que cette condition est réalisée en particulier si $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 (pourquoi ?). On note $(X_k)_{k\geq 0}$, une suite de variables aléatoires réelles, définies sur le même espace de probabilité, indépendantes et de même loi *symétrique*. On pose pour tout $k \geq 1$,

$$Y_k := a_k \sin(X_{k-1}), \qquad Z_k = X_k + Y_k.$$

2) Montrez que

$$\operatorname{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{2}$$

et en déduire que $R_n := n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} Y_k$ converge vers 0 en probabilité quand n tend vers l'infini.

3) On suppose désormais que X est de carré intégrable et d'écart-type σ strictement positif. Que peut-on dire de la convergence en loi de $T_n := n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} X_k$?

4) En vous appuyant sur un résultat du cours, déduire des deux convergences précédentes que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Z_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} Z, \tag{3}$$

où Z est une v.a. gaussienne dont on donnera les paramètres.

Ex 4. *Estimation de paramètres (7 points)*

Soient a et b des constantes strictement positives et X une variable aléatoire positive définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dont la fonction de survie est donnée par

$$P(X > t) = G_{a,b}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < a, \\ \exp(-bt) & \text{si } t \geq a. \end{cases} \tag{4}$$

1) Que vaut $P(X = a)$? La loi de X est-elle à densité ?

2) Calculez en fonction de a et b les quantités $\mathbf{E}(X-a)$ et $\mathbf{E}(X-a)^2$ et vérifiez que

$$\frac{2\mathbf{E}(X-a)}{\mathbf{E}(X-a)^2} = b. \tag{5}$$

3) En fait les paramètres a et b sont tous deux inconnus et on cherche à les estimer. Pour cela on note $\theta = (a,b)$, $\Theta =]0,+\infty[^2$ et on considère le modèle statistique $(\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$, avec un échantillon associé $X_1, \dots, X_n$, où pour tout $\theta \in \Theta$, les X_i sont

P_θ indépendantes et de même loi sous P_θ, donnée par la fonction de survie $G_\theta = G_{a,b}$ définie par (4). On commence par estimer a. Pour cela on introduit la statistique :

$$M_n := \min_{1\leq i\leq n} X_i.$$

Exprimez pour $t > 0$, $P_\theta(M_n > t)$ en fonction de $G_\theta(t)$. Vérifiez que pour tout $\theta \in \Theta$ et tout entier $n \geq 1$, $P_\theta(M_n \geq a) = 1$. En déduire une expression simple de $P_\theta(|M_n - a| > \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ quelconque. En déduire que

$$\forall \theta \in \Theta, \quad M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P_\theta-\text{p.s.}} a. \tag{6}$$

Ainsi M_n est un estimateur fortement consistant de a.

4) Pour estimer b, on propose compte-tenu de (5), la statistique :

$$T_n := \frac{2(S_n - nM_n)}{1 + \sum_{k=1}^n (X_k - M_n)^2}, \quad \text{où} \quad S_n := \sum_{k=1}^n X_k.$$

Montrez que T_n converge presque sûrement vers b. Commencez par vous demander ce qui se passerait si M_n était remplacé par a dans l'expression ci-dessus et pourquoi on n'a pas fait ce choix plus simple.

Table des valeurs de Φ, f.d.r. de la loi normale standard $\mathfrak{N}(0,1)$

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \mathrm{d}t, \quad Z \sim \mathfrak{N}(0,1).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986