Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2007–2008**

Examen 1$^{\text{re}}$ session, 30 janvier 2008, durée 3 heures

- Ce sujet comporte **4 pages**.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours d'IPE, dictionnaire bilingue pour étudiants étrangers.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. *Loi triangulaire* (5 points)

Soit f la fonction affine par morceaux, nulle en dehors de $]0, 2[$, représentée par la figure 1.

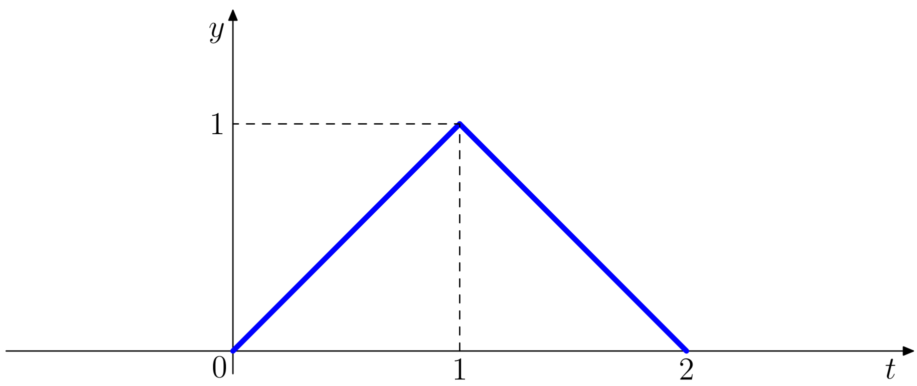

FIG. 1 – Densité triangulaire f

1) Vérifiez que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2) Soit Z une variable aléatoire positive de densité f (on ne vous demande pas d'en justifier l'existence) et F sa fonction de répartition. Donnez *sans calculer d'intégrale* les valeurs de $F(0)$, $F(1/2)$, $F(1)$ et $F(2)$. Expliquez comment vous les obtenez.

3) Calculez $\mathbf{E}\, Z$ en utilisant f. Le résultat était-il prévisible ?

Ex 2. *Vrai ou faux ?* (5 points)

Pour chacune des 5 affirmations suivantes, indiquez si vous la pensez vraie ou fausse en argumentant votre réponse. Si vous répondez « vrai », proposez une démonstration ou une référence à un résultat du cours. Si vous répondez « faux », il suffit de proposer un contre exemple. Seules les réponses argumentées seront prises en compte par les correcteurs.

1) Si les variables aléatoires X et $-X$ ont même loi, alors $P(X=0)=1$.

2) Si la variable aléatoire réelle X a une espérance, alors X est bornée presque sûrement, autrement dit, il existe une constante positive c telle que $P(|X| \leq c)=1$.

3) Pour chaque variable aléatoire réelle X, il existe un réel $b>0$ tel que

$$P(|X| \leq b) \geq 0{,}99.$$

4) Si la fonction de répartition F de la variable aléatoire X est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus D$, où D est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$, alors la loi de X admet une densité f qui est la dérivée de F sur $\mathbb{R} \setminus D$.

5) Si H est une fonction de répartition, alors pour toute variable aléatoire réelle X, $\mathbf{E}\, H(X)$ existe [1] dans $\mathbb{R}$.

Problème (12 points)

1) Soit $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. On sait qu'alors elle a une limite ℓ en $+\infty$, qui est soit un réel, soit $+\infty$. On sait aussi que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[g(0),\ell[$ et que la réciproque g^{-1} de cette bijection est définie et strictement croissante sur $[g(0),\ell[$. On note X une variable aléatoire positive. Justifiez l'égalité

$$\forall t \in [g(0),\ell[, \quad P\bigl(g(X)>t\bigr) = P\bigl(X > g^{-1}(t)\bigr). \tag{1}$$

2) On suppose de plus que la fonction g est C^1 sur $]0,+\infty[$ et que $g(0) \geq 0$. Ceci implique en particulier que g est positive et que $g(X)$ est une variable aléatoire positive. Démontrez la formule :

$$\mathbf{E}\, g(X) = g(0) + \int_0^{+\infty} P(X>s)g'(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2}$$

Indication. Poser $Y=g(X)$ et partir de la définition de $\mathbf{E}\, Y = \int_0^{+\infty} P(Y>t)\,\mathrm{d}t$ en découpant $\int_0^{+\infty} = \int_0^{g(0)} + \int_{g(0)}^{\ell}$ si $\ell=+\infty$, ou $\int_0^{+\infty} = \int_0^{g(0)} + \int_{g(0)}^{\ell} + \int_{\ell}^{+\infty}$ si $\ell<+\infty$.

L'intérêt de la formule (2) est qu'elle permet de calculer des moments fonctionnels d'une variable aléatoire qui n'est ni discrète ni à densité. La question suivante présente un exemple de cette situation.

3) Dans cette question, Z est une variable aléatoire positive de loi exponentielle de paramètre 1 et c une constante strictement positive. On pose $X := \max(Z,c)$.

a) Justifiez brièvement la représentation de la fonction de survie $s \mapsto P(X>s)$ proposée par la figure 2.

b) En déduire que la loi de X n'est ni discrète ni à densité.

c) Calculez $\mathbf{E}\, X$ en fonction de c.

d) Calculez $\mathbf{E}\, X^2$ en fonction de c.

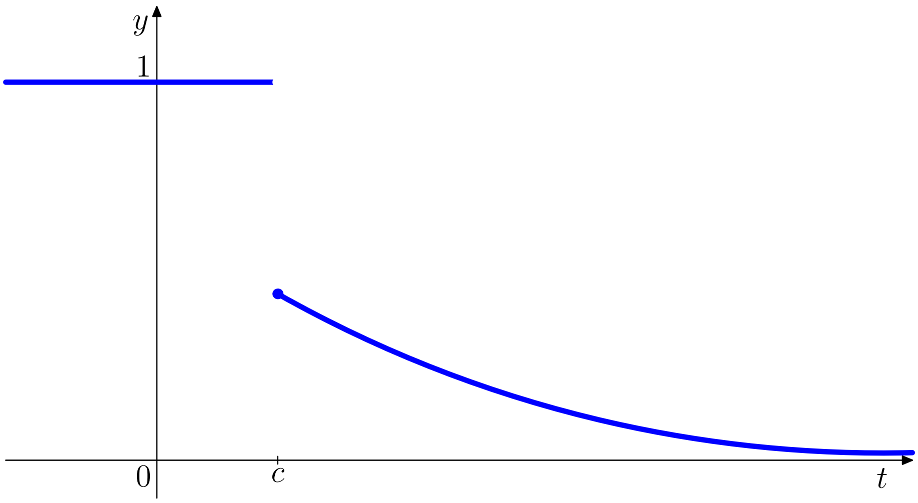

FIG. 2 – Fonction de survie $s \mapsto P(X > s)$

Dans la suite, on va utiliser la formule (2) pour apporter une réponse partielle au problème suivant. Grâce à l'inégalité de Markov, on sait que plus la v.a. positive X a des moments d'ordre élevé, plus vite sa fonction de survie G tend vers 0 en $+\infty$. On se demande a contrario si quelle que soit la vitesse de convergence vers 0 de G, il est possible de trouver un moment fonctionnel $\mathbf{E}\, h(X)$ fini avec h tendant vers $+\infty$ en $+\infty$. Les deux questions suivantes sont consacrées à l'étude d'un exemple où G tend « lentement » vers 0, afin de se faire une intuition.

4) Soit a un réel. Montrez que l'intégrale généralisée

$$I(a) := \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^a}$$

converge si et seulement si $a > 1$.

5) Soit X une variable aléatoire positive de fonction de survie G définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0, \\ \dfrac{1}{\ln(\mathrm{e} + t)} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Dans cette formule, la constante e est la base du logarithme néperien ($\ln(\mathrm{e}) = 1$).

a) Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{E}\, X^\varepsilon = +\infty$.

b) Montrez que pour tout $b \in]0, 1[$, $\mathbf{E}\,(\ln(1 + X))^b < +\infty$.

6) On suppose plus généralement que X est une variable aléatoire positive dont la fonction de survie G est C^1 sur $]0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Ceci implique en particulier que $G(t)$ est strictement positif pour tout $t \in [0, +\infty[$

1. On admettra que toute fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable, ce qui assure ici que $H(X)$ est bien une variable aléatoire.

(pourquoi ?). Montrez l'existence d'une fonction positive h, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et telle que $\mathbf{E}\, h(X) < +\infty$. *Indication :* essayez avec $h : t \mapsto G(t)^{-1/2}$. La variable aléatoire X considérée dans cette question est-elle nécessairement à densité ?