IPE Math 306 **Année 2009–2010**

Examen de deuxième session
24 février 2010, durée : 3 heures

- Ce sujet comporte **3 pages** et quatre exercices indépendants.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours d'IPE, dictionnaire bilingue pour étudiants étrangers.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. Échauffement *(5 points)*
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont le graphe est donné par

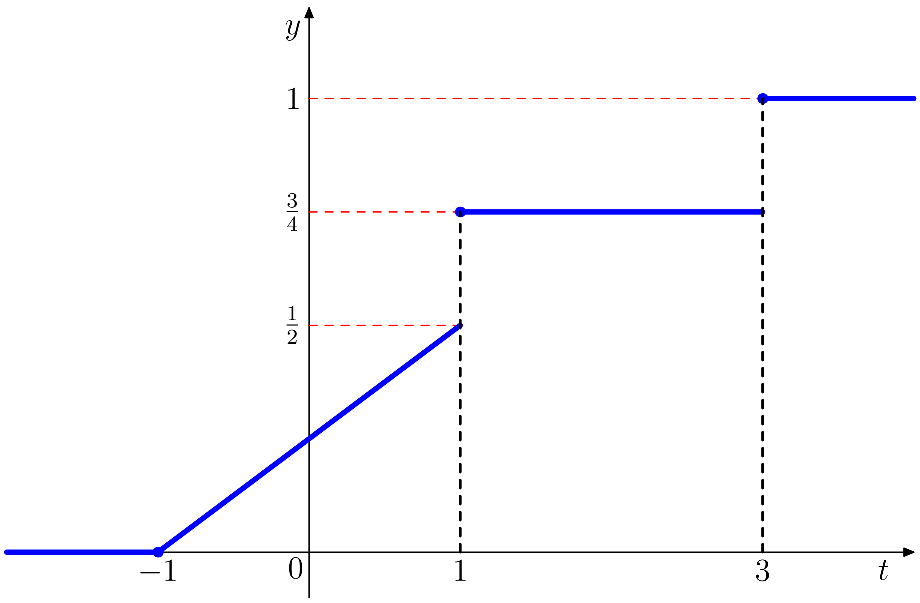

Fig. 1 – Graphe $y = F(t)$

1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.

2) La variable aléatoire X peut-elle être positive ?

3) Donner sans calcul les probabilités

$$P(X = 1) \quad , \quad P(X = 3) \quad , \quad P(X \in]0, 1]) \quad , \quad P(X \in [1, 3/2[).$$

4) La variable aléatoire X peut-elle être une variable aléatoire discrète, à densité ?

5) Quelle est l'espérance de X ?

6) Quelle est la loi de $[X]$, où $[x]$ désigne la partie entière d'un réel x (on rappelle que $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \;\; n \leq x\}$) ? Quelle est son espérance ?

Ex 2. Loi de Pareto *(5 points)*

1) Soit $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On note F_Y sa fonction de répartition. Exprimer à partir de F_Y la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire $Z = \mathrm{e}^Y$.

2) Soit a un réel strictement positif fixé. On définit la fonction f par

$$f(t) = \frac{a}{t^{a+1}} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t).$$

Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire que f est une densité de probabilité. La loi de densité f s'appelle *loi de Pareto* de paramètre a.

3) Une variable aléatoire X a pour densité f.

a) Calculer la fonction de répartition F_X de X.

b) La variable aléatoire X est-elle intégrable ? Si oui, calculer son espérance.

c) Comment simuleriez-vous une telle variable aléatoire ? *Indication : on pourra montrer que F_X définit une bijection d'un ensemble A dans un ensemble B et calculer sa fonction réciproque.*

4) Si Y est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre a, quelle est la loi de $Z = \mathrm{e}^Y$?

Ex 3. Minimum et maximum de deux uniformes *(4 points)*

Soit U et V deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité indépendantes et de même loi uniforme sur $]0,1[$. On définit les variable aléatoires

- $X = \max\{U, V\}$,
- $Y = \min\{U, V\}$,
- $D = |U - V|$.

1) Déterminer la loi de ces variables aléatoires.

2) Calculer l'espérance de X et de Y puis en déduire celle de D.

Ex 4. Fonction génératrice des moments *(7 points)*

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la fonction génératrice des moments par

$$\phi(s) = \mathbf{E}(s^X).$$

1) Quelques exemples : donner l'ensemble de définition de ϕ puis la calculer dans les cas suivants :

- X suit une loi de Bernoulli de paramètre p,
- X suit une loi Binomiale de paramètres (n,p) avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$,
- X suit une loi de Poisson de paramètre α où $\alpha > 0$.

2) Montrer que ϕ définit une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$.

3) Montrer que

a) si X est intégrable alors $E(X) = \phi'(1)$

b) si X est de carré intégrable alors $\mathrm{Var}(X) = \phi''(1) + \phi'(1) - [\phi'(1)]^2$.

4) Exprimer la loi de X (c'est à dire les valeurs de $P(X = n)$ pour tout entier n) en fonction des dérivées de ϕ en 0. En déduire que la fonction génératrice ϕ caractérise la loi de X.

5) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de fonctions génératrices respectives ϕ et ψ. Exprimer la fonction génératrice de $Z = X + Y$ en fonction de ϕ et ψ.

6) Utiliser les questions précédentes pour trouver la loi de la somme de deux variables aléatoires X et Y indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs α et β.