Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2009–2010**

Examen
8 janvier 2010, durée : 3 heures

- Ce sujet comporte **3 pages** et trois exercices indépendants.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours d'IPE, dictionnaire bilingue pour étudiants étrangers.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. Vrai faux ? *(4 points)*
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquez si vous la pensez vraie ou fausse en argumentant votre réponse. Si vous répondez « vrai », proposez une démonstration ou une référence à un résultat du cours. Si vous répondez « faux », il suffit de proposer un contre exemple. Seules les réponses argumentées seront prises en compte par les correcteurs.

1) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln P(A_n)$ est convergente de limite l alors

$$P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mathrm{e}^l.$$

2) Si X est une variable aléatoire réelle à densité alors X_+ est aussi à densité.

3) Si X est une variable aléatoire réelle intégrable alors X est presque sûrement bornée.

4) Si X est une variable aléatoire réelle de densité f sur $\mathbb{R}$ alors X^2 est une variable aléatoire à densité et une densité de X^2 est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\Big(f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})\Big)\,\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t).$$

Ex 2. Version constructive du théorème de Stone-Weierstrass *(6 points)*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ et B_n une variable aléatoire de loi binomiale de paramètre (n,p) définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1) Donner l'espérance et la variance de B_n.

2) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que pour tout $\delta > 0$,

$$P\left(\left|\frac{B_n}{n} - p\right| \geq \delta\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

On va utiliser ce résultat pour montrer que toute fonction f continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes. On se donne donc une fonction f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$.

3) Montrer que $g_n(p) = \mathbf{E}\left(f\left(\frac{B_n}{n}\right)\right)$ est un polynôme (en la variable p) de degré au plus n que l'on explicitera.

On veut montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$.

4) Montrer que pour tout $p \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|g_n(p) - f(p)| \leq \mathbf{E}(X_n),$$

où X_n est la variable aléatoire positive définie par

$$X_n = \left| f\left(\frac{B_n}{n}\right) - f(p) \right|.$$

5) Montrer que X_n est uniformément bornée. *Indication : on montrera qu'il existe un réel $M > 0$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\omega \in \Omega$ $|X_n(\omega)| \leq M$.*

6) On note pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $\delta > 0$, $A_n(\delta)$ l'événement :

$$A_n(\delta) = \left\{ \left|\frac{B_n}{n} - p\right| \geq \delta \right\}.$$

a) En utilisant la continuité uniforme de f, montrer qu'il existe $\delta > 0$ (qui dépend de f et de ε) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E\left(X_n \mathbf{1}_{A_n^c(\delta)}\right) \leq \varepsilon.$$

Indication : on montrera que si δ est bien choisi alors $X_n(\omega) \leq \varepsilon$ pour tout $\omega \in A_n^c(\delta)$.

b) En utilisant les questions 2 et 5, montrer qu'il existe un entier N non nul (qui dépend de f et de δ) tel que pour tout $n \geq N$

$$E\left(X_n \mathbf{1}_{A_n(\delta)}\right) \leq \varepsilon.$$

7) Conclure.

Problème *(10 points)*

Les parties B et C de cet exercice sont indépendantes. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité.

A) Soit X une variable aléatoire positive définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de fonction de répartition F_X donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^a} & \text{si} \quad x \geq 1, \\ 0 & \text{si} \quad x < 1. \end{cases}$$

où a est un paramètre strictement positif.

1) Expliquer pourquoi F_X est une fonction de répartition et tracer cette fonction.

2) Montrer que la loi de la variable aléatoire X admet une densité f sur $\mathbb{R}$ que l'on explicitera.

3) A l'aide de f, étudier l'intégrabilité de X. Dans les cas d'intégrabilité, calculer $E(X)$.

4) Est-ce que X est de carré intégrable ? Si oui, quelle est la variance de X ?

5) Comment simuleriez-vous une variable aléatoire ayant la même loi que X ? *Indication : il faut construire une variable aléatoire de même loi que X à partir d'une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0,1]$ en utilisant la fonction de répartition F_X.*

B) Soit V une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ indépendante de X. On définit $Y = V + (1-V)X$.

6) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y et tracer cette fonction.

7) La variable aléatoire Y est-elle discrète ? à densité ?

8) Est-ce que Y est intégrable ? Si oui, quelle est son espérance ?

9) Comment simuleriez-vous une variable aléatoire ayant la même loi que Y ?

C) On suppose dans cette partie que $a = 2$, on considère $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indépendantes et de même loi que X et on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Z_n = \min(X_1, \dots, X_n).$$

10) Déterminer la fonction de survie G_n de Z_n. *Indication : on rappelle que la fonction de survie G_n est la fonction définie par $G_n(t) = P(Z_n > t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.*

11) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est intégrable et calculer son espérance.

12) Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $Z(\omega) = \lim_{n\to+\infty} Z_n(\omega)$.

a) Justifier l'existence de la variable aléatoire Z.

b) Montrer que $P(Z \geq 1) = 1$.

c) En utilisant le théorème de Beppo-Levi, montrer que $E(Z) = 1$.

d) En déduire que $P(Z = 1) = 1$.