Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math306 **Année 2004-2005**

Examen de deuxième session, 9 juin 2005, durée 3 heures

Documents autorisés : polycopié du cours d'IPE.
Calculatrices autorisées. Compas autorisés.

Ce sujet comporte **4 pages**. Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.

Ex 1. *Franchise et plafond (5 points)*

En cas d'incendie d'un certain type de logement, la loi du coût X des « dommages aux biens » a une fonction de survie G de la forme

$$\forall t \geq 0, \quad G(t) := P(X > t) = \frac{1}{(1+t)^a},$$

où a est un paramètre positif.

Une compagnie d'assurances propose la couverture de ce risque « dommages aux biens », par un contrat qui prévoit une franchise m et un plafond M. La franchise est destinée à éviter les déclarations de petits sinistres et ainsi à économiser sur les frais de gestion. Le plafond M limite la responsabilité de la compagnie. Notons Y le remboursement perçu par l'assuré en cas d'incendie. La règle franchise-plafond nous permet d'écrire [1]

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leq m, \\ X(\omega) & \text{si } m < X(\omega) \leq M, \\ M & \text{si } X(\omega) > M. \end{cases}$$

On note $H : [0, +\infty[\to [0, 1]$, $t \mapsto H(t) := P(Y > t)$ la fonction de survie de Y. Sa représentation graphique est esquissée à la figure 1.

1) Justifiez cette représentation graphique en exprimant $H(t)$ à l'aide de G dans les trois cas $0 \leq t < m$, $m \leq t < M$ et $t \geq M$.

2) La loi de la variable aléatoire positive Y est-elle à densité ?

3) Calculer $\mathbf{E}Y$ en fonction de m, M et a.

1. Pour simplifier, on suppose que le seul but de la franchise est d'éviter les déclarations de petits sinistres. Donc quand l'assuré est remboursé, on ne déduit pas m de son remboursement.

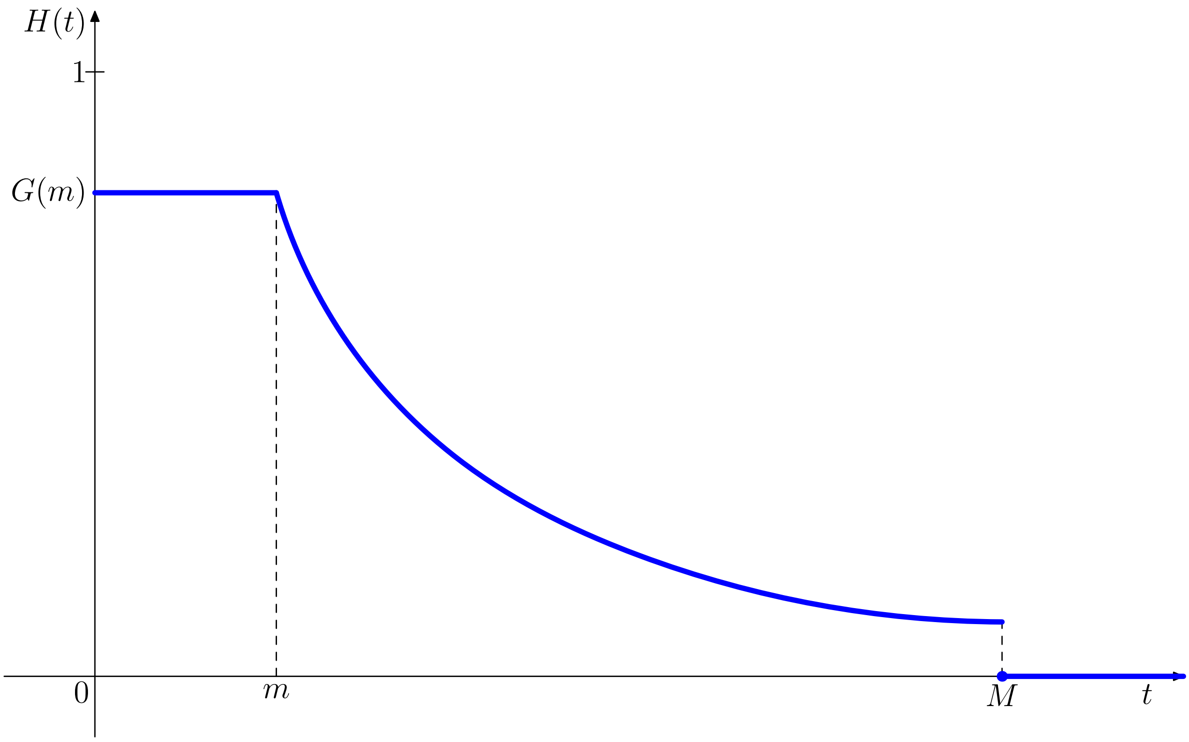

FIG. 1 – Fonction de survie H de la v.a. positive Y

Ex 2. *Médiane(s) et minimisation d'écart (6 points)*

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. On appelle médiane de X (ou de la loi de X), tout réel m vérifiant

$$P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}.$$

On admettra qu'il y a toujours au moins une médiane. Le but de cet exercice est de prouver la propriété de minimisation suivante. Si X est intégrable et m est une médiane de X, alors pour tout réel c,

$$\mathbf{E}|X - c| \geq \mathbf{E}|X - m|. \tag{1}$$

1) Vérifiez que si m est une médiane de X, $-m$ est une médiane de $-X$.

2) On choisit une médiane m de X et on fixe $c > m$. On pose

$$Y := |X - c| - |X - m|$$

et on se propose de montrer l'inégalité $\mathbf{E}Y \geq 0$.

2.a) Justifiez l'intégrabilité de Y.

2.b) Expliquez la décomposition $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$, où

$$Y_1 := Y\mathbf{1}_{]-\infty,m]}(X), \quad Y_2 := Y\mathbf{1}_{]m,c]}(X), \quad Y_3 := Y\mathbf{1}_{]c,+\infty]}(X).$$

2.c) Vérifiez les égalités

$$Y_1 = (c-m)\mathbf{1}_{]-\infty,m]}(X), \quad Y_2 = (m+c-2X)\mathbf{1}_{]m,c]}(X), \quad Y_3 = (m-c)\mathbf{1}_{]c,+\infty]}(X).$$

2.d) Justifiez l'inégalité $Y_2 \geq (m-c)\mathbf{1}_{]m,c]}(X)$ et en déduire que

$$\mathbf{E}Y \geq (c-m)\big(P(X \leq m) - P(X > m)\big).$$

2.e) Conclure sur la positivité de $\mathbf{E}Y$.

3) Sans reprendre toute l'étude ci-dessus pour $c < m$, compléter la démonstration de la propriété de minimisation (1).

4) Montrez que si m et m' sont deux médianes de X, $\mathbf{E}|X-m| = \mathbf{E}|X-m'|$.

Ex 3. *Loi uniforme sur le disque unité et localisation de sommes (10 points)*

Dans cet exercice, on note D le disque unité ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour la distance euclidienne, $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 < 1\}$. On note $M := (X,Y)$ un vecteur aléatoire suivant la loi uniforme sur D et on pose

$$R := (X^2+Y^2)^{1/2} = \|(X,Y)\|_2.$$

1) On note F la fonction de répartition de la variable aléatoire positive R. Montrer que F est donnée par

$$F(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0, \\ r^2 & \text{si } 0 < r \leq 1, \\ 1 & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

2) Calculer $\mathbf{E}R$.

3) Expliquez pourquoi la loi de R admet une densité f et calculez f.

4)

4.a) Calculez $\mathbf{E}(R^2)$.

4.b) Expliquez pourquoi X et Y ont même loi.

4.c) En déduire sans calcul les valeurs de $\mathbf{E}(X^2)$ et $\mathbf{E}(Y^2)$.

5) On note C le carré $[1-\varepsilon, 1]^2$ avec $\varepsilon > 0$ choisi suffisamment petit pour que $C \cap D = \emptyset$ (faites un dessin).

5.a) Que vaut $P(M \in C)$?

5.b) Justifiez l'inégalité $P(X \in [1-\varepsilon, 1]) > 0$ à l'aide d'une interprétation géométrique de cette probabilité.

5.c) X et Y sont-elles indépendantes ?

6) Expliquez pourquoi X est intégrable et la loi de X est *symétrique*, *i.e.* X et $-X$ ont même loi. En déduire sans calcul que $\mathbf{E}X = 0$. Comme Y a même loi que X, il est clair que tout ceci vaut aussi pour Y.

7) On considère une suite $(M_i)_{i\geq 1}$ de vecteurs aléatoires indépendants et de même loi que M. On note $M_i = (X_i, Y_i)$ et on pose

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} M_i, \quad S'_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S''_n := \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

ainsi $S_n = (S'_n, S''_n) \in \mathbb{R}^2$. On assimile le vecteur aléatoire S_n au point aléatoire ayant les mêmes coordonnées et on se propose *localiser* ce point.

7.a) Que vaut $P(\|S_n\|_2 \leq n)$?

7.b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $t > 0$,

$$P\big(\|S_n\|_2 \geq t\sqrt{n}\big) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Indication. On pourra utiliser après justification le fait que si U et V sont deux variables aléatoires quelconques $P(U + V \geq \varepsilon) \leq P(U \geq \varepsilon/2) + P(V \geq \varepsilon/2)$.

7.c) On prend comme unité le centimètre, D est donc le disque de centre O et de rayon 1 cm. Donner un minorant de la probabilité que S_{10000} se trouve à au plus 5 mètres de l'origine O.