Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math306 **Année 2004-2005**

Examen janvier 2005 durée 3 heures

Documents autorisés : polycopié du cours d'IPE. Calculatrices autorisées.

Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.

Ex 1. *Interprétation du graphique d'une f.d.r. (5 points)*

La variable aléatoire X a pour fonction de répartition F représentée figure 1.

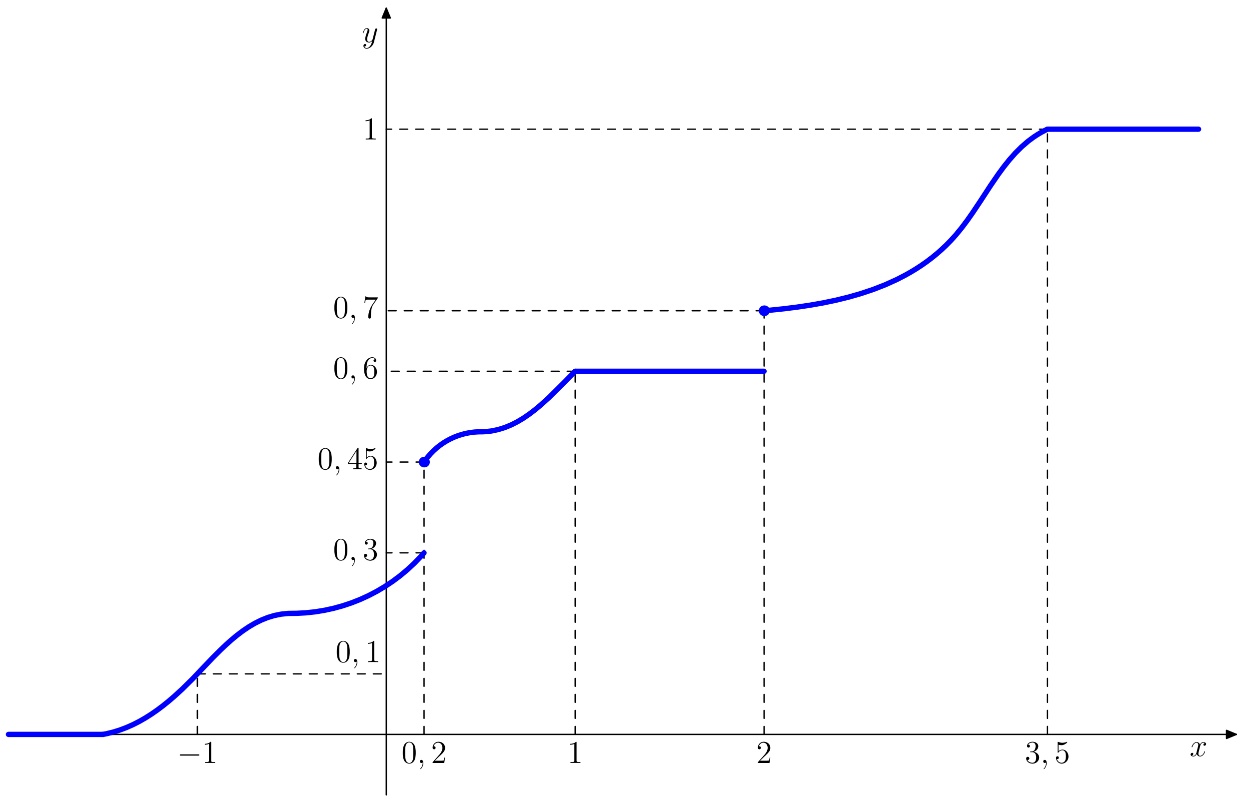

FIG. 1 – Fonction de répartition F de la v.a. X

En exploitant les informations fournies par ce graphique [1], donner les valeurs des probabilités suivantes.

$P(X \leq -1)$, $P(X = 0{,}2)$, $P(X = 0{,}3)$, $P(X \geq 0{,}2)$,
$P(X > 2)$, $P(X \in [1; 1{,}5])$, $P(X \in [1; 2])$, $P(|X| > 1)$.

1. Ne perdez pas de temps à le reproduire sur votre copie.

La variable aléatoire X est-elle à densité ?

L'exercice suivant rassemble sous forme de questions indépendantes des propriétés élémentaires pouvant être utiles dans la résolution des exercices 3 et 4.

Ex 2. *(3 points)*

1) Soient $A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles du même Ω, deux à deux *disjoints*. Montrer que

$$\text{si } A := \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \mathbf{1}_A = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}.$$

2) Montrer que si $A \subset B$, $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$.

3) Soient X et Y deux variables aléatoires ayant même loi. Expliquer pourquoi si X et Y sont positives, $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y$. Que peut-on dire d'analogue sans l'hypothèse de positivité ?

Ex 3. *Loi logistique (9 points)*

1) Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, sa fonction de survie est donc donnée par

$$P(Y > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Expliquer pourquoi Y est intégrable et calculer $\mathbf{E}Y$. Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y' := -Y$.

2) Dans toute la suite de l'exercice, on note U une variable aléatoire réelle à valeurs dans $]0,1[$, de loi uniforme sur $]0,1[$. On pose

$$Z := \ln U$$

Montrer que Z et $-Y$ ont même loi. *Indication :* on pourra calculer la fonction de répartition de Z. En déduire la valeur de $\mathbf{E}Z$.

3) On définit la variable aléatoire réelle X par

$$X := \ln\left(\frac{1-U}{U}\right)$$

Calculer sa fonction de survie $G : \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto G(x) := P(X > x)$. En déduire sa fonction de répartition F et l'existence d'une densité f que l'on calculera.

4) Justifier l'existence de $\mathbf{E}X$ et la calculer. *Indication :* il y a moyen de traiter cette question *sans écrire aucune intégrale*, en notant simplement que $X = \ln(1-U) - \ln U$ et en cherchant la loi de $1 - U$.

Ex 4. *Une somme doublement aléatoire (8 points)*

Sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on suppose définies

– une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$,

– une suite de variables aléatoires positives $(X_i)_{i\geq 1}$, ayant toutes même loi.

On pose alors :

$$S_0 := 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (n \geq 1).$$

On définit la variable aléatoire T par

$$T := \sum_{i=1}^{N} X_i, \tag{1}$$

autrement dit,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega).$$

Ce modèle est d'un usage courant. Par exemple si une compagnie d'assurances s'intéresse au risque « dommages au véhicule » pour une certaine catégorie de véhicules, dans un département donné, N représente le nombre de sinistres déclarés au cours d'une période de temps donnée et X_i le remboursement payé par la compagnie pour le i-ème sinistre déclaré pendant cette période. Alors T est le montant total des remboursements effectués pour la période. On peut imaginer facilement d'autres applications comme le cumul des hauteurs de pluie sur une année (ou des heures d'ensoleillement), le total des retraits effectués sur un distributeur automatique bancaire en une journée, etc.

Le but de cet exercice est de *calculer l'espérance de T en fonction des espérances des X_i et de N* sans supposer connues les lois des X_i ou de N.

On suppose de plus que N est *indépendante de la suite* $(X_i)_{i\geq 1}$, ce qui implique notamment (on ne vous demande pas de le justifier) que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tous boréliens B et B' de $\mathbb{R}$, les évènements $\{S_j \in B\}$ et $\{N \in B'\}$ sont indépendants.

1) Trouvez l'erreur dans le raisonnement suivant qui n'aurait pas manqué de fleurir dans de nombreuses copies[2] si l'énoncé s'arrêtait ici. *Par additivité de l'espérance des variables aléatoires positives,*

$$\mathbf{E}T = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}X_i = N\mathbf{E}X_1.$$

2) Soit $A \in \mathcal{F}$ un évènement et Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tels que pour tout $t \geq 0$, les évènements $\{Y > t\}$ et A soient indépendants. Montrer que

$$\forall t \geq 0, \quad P(Y\mathbf{1}_A > t) = P(Y > t)P(A). \tag{2}$$

Indication : commencer par calculer $P(\{Y\mathbf{1}_A > t\} \cap A^c)$.

2. Pas la vôtre bien sûr, mais celles de vos voisins. . .

3) Déduire de ce qui précède que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}\big(S_j \mathbf{1}_{\{N=j\}}\big) = P(N=j) j \mathbf{E} X_1. \tag{3}$$

4) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $T_n := T\mathbf{1}_{\{N \leq n\}}$. Justifiez l'égalité

$$T_n = \sum_{j=0}^{n} S_j \mathbf{1}_{\{N=j\}}. \tag{4}$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E} T_n = \mathbf{E} X_1 \sum_{j=0}^{n} j P(N=j). \tag{5}$$

5) Vérifiez que la suite de variables aléatoires positives $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en croissant vers T et en déduire que

$$\mathbf{E} T = (\mathbf{E} N)(\mathbf{E} X_1). \tag{6}$$

6) Retrouver (6) à partir de (3) en établissant directement la formule

$$T = \sum_{j \in \mathbb{N}} S_j \mathbf{1}_{\{N=j\}} \tag{7}$$

(on comparera les valeurs prises par les deux membres en un ω quelconque) et en utilisant un résultat du cours.