Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math314 **Année 2004-2005**

Examen, juin 2005, deuxième session, durée 3 heures.

- Ce sujet comporte **4 pages**, dont une table de la loi $\mathfrak{N}(0,1)$.
- Documents autorisés : polycopié du cours IPE, polycopié Simulation, notes manuscrites du cours d'IS.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. *Échauffement du dé et des candidats (2 points)*

On lance 3 600 fois un dé équilibré et on s'intéresse au nombre X de « six » obtenus. Donnez en justifiant votre réponse, une valeur approchée de $P(578 \leq X \leq 622)$.

Ex 2. *Comportement asymptotique de variables de loi $\chi^2(n)$ (7 points)*

On rappelle que si X suit la loi gaussienne $\mathfrak{N}(m,\sigma)$, $\mathbf{E}X = m$ et $\operatorname{Var} X = \sigma^2$. Dans tout l'exercice, on considère une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathfrak{N}(0,1)$. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$Z_n := \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

On sait qu'alors Z_n suit la loi $\chi^2(n)$.

1) Dans cette question, X est une v.a. de loi $\mathfrak{N}(0,1)$.

1.a) Expliquez pourquoi X a des moments de tout ordre.

1.b) Que valent les $\mathbf{E}(X^{2n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$?

1.c) On pose $c_n := \mathbf{E}(X^{2n})$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrez en intégrant par parties que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{2n+1} c_{n+1}.$$

1.d) En déduire une formule explicite pour c_n et calculez $\mathbf{E}(X^4)$.

2) En justifiant votre réponse, calculez $\mathbf{E}Z_n$ et $\operatorname{Var} Z_n$.

3) Quel est le comportement de la suite de v.a. $(n^{-1}Z_n)_{n\geq 1}$ quand n tend vers $+\infty$?

4) Justifiez la convergence

$$\frac{Z_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} Z, \tag{1}$$

où Z suit la loi $\mathfrak{N}(0,1)$.

5) On note Y une variable gaussienne de loi $\mathfrak{N}(0, 2^{-1/2})$. Prouvez la convergence

$$\sqrt{Z_n} - \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} Y. \tag{2}$$

Indication. On peut commencer par remarquer que Z_n étant une v.a. positive, $Z_n = (\sqrt{Z_n})^2$, d'où

$$\sqrt{Z_n} - \sqrt{n} = \frac{Z_n - n}{\sqrt{Z_n} + \sqrt{n}}.$$

On pourra alors exploiter les deux questions précédentes.

Ex 3. *Estimation du paramètre d'une loi exponentielle (11 points)*

1) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\operatorname{Exp}(\theta)$, de densité $f_\theta : x \mapsto \theta e^{-\theta x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, où $\theta \in]0, +\infty[$. Vérifiez que

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{\theta}, \qquad \operatorname{Var} X = \frac{1}{\theta^2}.$$

2) On se propose d'estimer le paramètre $\theta > 0$ d'une loi exponentielle $\operatorname{Exp}(\theta)$, au vu d'un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de grande taille. Plus précisément, on considère que les X_i sont des variables aléatoires *strictement* positives, définies sur un modèle statistique $(\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta)_{\theta\in]0,+\infty[})$ et sont pour tout $\theta \in]0, +\infty[$, P_θ-indépendantes et de même loi $\operatorname{Exp}(\theta)$ sous P_θ. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad T_n := \frac{n}{S_n}.$$

Montrez que T_n est un estimateur fortement consistant de θ.

3) T_n est-il sans biais ? Vous pouvez justifiez votre réponse en examinant le cas $n = 1$.

4) Justifiez la convergence suivante, où Z désigne une v.a. gaussienne de loi $\mathfrak{N}(0, 1)$:

$$\frac{\theta S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} Z. \tag{3}$$

5) En déduire un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 0,95, en négligeant l'erreur due à l'approximation gaussienne. Application numérique avec $n = 400$ et $S_{400}(\omega) = 1\ 460$.

6) Sur le même modèle statistique $(\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta)_{\theta\in]0,+\infty[})$, on cherche à estimer le paramètre θ de la loi de densité

$$g_\theta : x \longmapsto \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Pour cela on observe une suite $(Y_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires strictement positives, qui sont pour tout $\theta > 0$, P_θ-indépendantes et de même loi de densité g_θ sous P_θ. Montrez que

$$\widehat{\theta}_n := \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + Y_i)}$$

est l'estimateur par maximum de vraisemblance de θ.

7) Vérifiez par un calcul d'intégrale que si la v.a. strictement positive Y a pour densité g_θ,

$$\forall y \geq 0, \quad P\big(\ln(1+Y) > y\big) = \mathrm{e}^{-\theta y}.$$

En déduire la loi de la v.a. positive $\ln(1+Y)$.

8) En vous appuyant sur les questions 2)–4), donnez quelques propriétés de $\widehat{\theta}_n$.

Table des valeurs de Φ, f.d.r. de la loi normale standard $\mathfrak{N}(0,1)$

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \mathrm{d}t, \quad Z \sim \mathfrak{N}(0,1).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986