Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2008–2009**

Examen de deuxième session
septembre 2009, durée : 3 heures

- Ce sujet comporte **2 pages** et quatre exercices indépendants.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours d'IPE, dictionnaire bilingue pour étudiants étrangers.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. Vrai ou faux ? *(4 points)*
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquez si vous la pensez vraie ou fausse en argumentant votre réponse. Si vous répondez « vrai », proposez une démonstration ou une référence à un résultat du cours. Si vous répondez « faux », il suffit de proposer un contre exemple. Seules les réponses argumentées seront prises en compte par les correcteurs.

1) Un produit au plus dénombrable d'ensembles finis est au plus dénombrable.

2) Si X est une variable aléatoire intégrable d'espérance positive, alors X est presque surement positive.

3) Si X est une variable aléatoire strictement positive de densité f sur $]0,+\infty[$ alors $1/X$ est une variable aléatoire strictement positive de densité g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = f(1/x)$.

4) Si A et B sont deux événements tels que $\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = 0$ alors A et B sont indépendants.

Ex 2. *(4 points)*
Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. On pose $Z = \min(X, c)$ où c est un réel.

1) Calculer la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X.

2) Si la loi de X a pour densité f, est-ce que la loi de Z est encore à densité ? Si oui, laquelle ?

3) Faut-il rajouter une ou plusieurs conditions sur X pour que la variable aléatoire Z soit intégrable ? Si oui, laquelle ou lesquelles ?

4) Donner la fonction de répartition de Z et son espérance (si elle existe) lorsque X suit une loi exponentielle de paramètre 1 et $c > 0$.

Ex 3. *(5 points)*
Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition est donnée par

$$F(t) = \log_{10}(t) \quad \text{pour tout } t \in [1, 10[.$$

On rappelle que le logarithme en base 10 est défini comme la fonction réciproque de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$ donnée par $x \mapsto 10^x$.

1) Tracer la fonction de répartition F sur $\mathbb{R}$.

2) La loi de X est-elle à densité ? Si oui, donner une densité de la loi de X.

3) Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de X.

4) Comment simuler une telle loi ? (c'est à dire, construire une variable aléatoire de même loi que X à partir d'une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0, 1]$).

5) On pose $Y = [X]$ où $[x]$ désigne la partie entière d'un réel x (on rappelle que $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z}\,;\ n \leq x\}$). Quelle est la loi de Y ? Quelle est son espérance ?

Ex 4. Loi uniforme sur le disque unité *(8 points)*

Dans cet exercice, on note D le disque unité ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $|.|_1$:

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\quad |x| + |y| < 1\}.$$

On note $M := (X, Y)$ un vecteur aléatoire suivant la loi uniforme sur D et on pose

$$R := |X| + |Y| = \|(X, Y)\|_1.$$

1) Tracer D. Quelle est la valeur de $\lambda_2(D)$ où λ_2 est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$?

2) On note F la fonction de répartition de la variable aléatoire positive R. Montrer que F est donnée par

$$F(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0, \\ r^2 & \text{si } 0 \leq r < 1, \\ 1 & \text{si } r \geq 1. \end{cases}$$

3) Calculer $\mathbf{E}(R)$.

4) Expliquez pourquoi la loi de R admet une densité f et calculez f.

5) Expliquez pourquoi X et Y ont même loi. En déduire sans calcul les valeurs de $\mathbf{E}(|X|)$ et $\mathbf{E}(|Y|)$.

6) On note C le carré $[1/2, 1]^2$.

6.a) Que vaut $P(M \in C)$?

6.b) Justifiez l'inégalité $P(X \in [1/2, 1]) > 0$ à l'aide d'une interprétation géométrique de cette probabilité.

6.c) X et Y sont-elles indépendantes ?

7) Expliquez pourquoi la loi de X est *symétrique*, *i.e.* X et $-X$ ont même loi. En déduire sans calcul que $\mathbf{E}X = 0$. Comme Y a même loi que X, il est clair que tout ceci vaut aussi pour Y.

8) Donner la loi de X. Utiliser cette loi pour retrouver la valeur de $\mathbf{E}(|X|)$.