Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2006–2007**

Examen de deuxième session
8 mars 2007, durée : 3 heures
Documents autorisés : polycopié de cours d'IPE. Calculatrices autorisées.

Ce sujet comporte **3 pages** dont 2 figures. Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle. Les trois exercices sont indépendants.

Ex 1. Échauffement *(5 points)*
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont le graphe est donné par

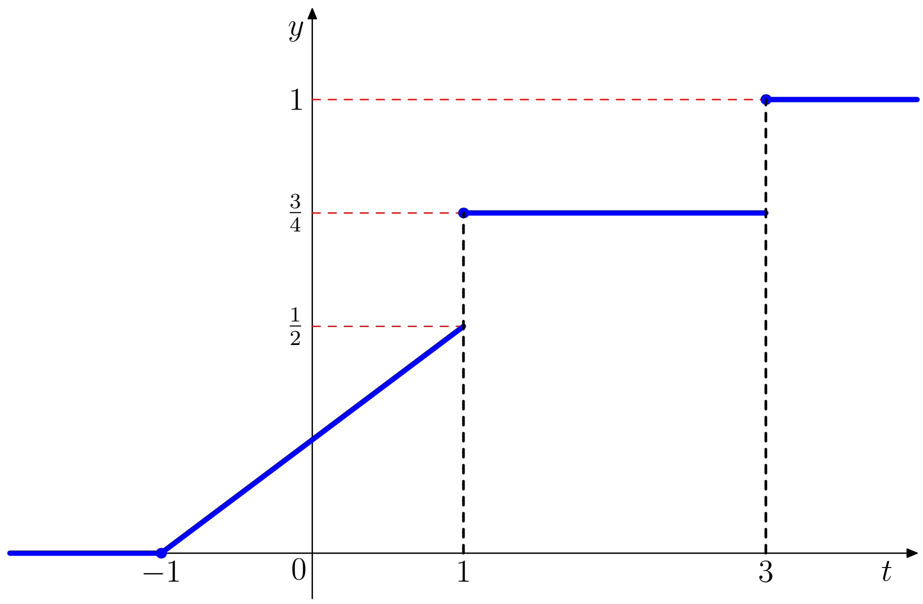

FIG. 1 – Graphe $y = F(t)$

1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.

2) La variable aléatoire X est-elle positive ?

3) La variable aléatoire X peut-elle être une variable aléatoire discrète, à densité ?

4) Quelle est l'espérance de X (on pourra la donner sans faire de calculs) ?

5) Quelle est la loi de $[X]$ où $[x]$ désigne la partie entière d'un réel x (on rappelle que $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \ \ n \leq x\}$) ? Quelle est son espérance ?

Ex 2. Une histoire de boules *(9 points)*
On effectue une suite infinie de tirages avec remise dans une urne contenant b boules dont r boules rouges, j boules jaunes et v boules vertes. Ainsi, un événement élémentaire est représenté par une suite $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où chaque ω_n désigne le résultat du n^{e} tirage ($n \in \mathbb{N}^*$) : R pour le tirage d'une boule rouge, J pour celui d'une boule jaune et V pour celui d'une boule verte. Donc l'ensemble des événements élémentaires est $\Omega = \{R, J, V\}^{\mathbb{N}^*}$. Dans la suite de l'exercice, on notera les événements ($i \in \mathbb{N}^*$) :

- $R_i :=$ « tirer une boule rouge au i^{e} tirage »,
- $V_i :=$ « tirer une boule verte au i^{e} tirage »,
- $J_i :=$ « tirer une boule jaune au i^{e} tirage »,

et p_R, p_J et p_V les proportions respectives des boules rouges, jaunes et vertes dans l'urne.

1) On propose dans un premier temps d'étudier l'événement $A :=$ « tirer un nombre fini de boules rouges ».

a) L'ensemble A (sous-ensemble de Ω) est-il dénombrable ?

b) Exprimer A en fonction des événements $(R_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

c) Calculer la probabilité $P(A)$.

On s'intéresse dans la suite de l'exercice à l'événement $B :=$ « tirer une boule rouge avant une boule verte » et on calcule sa probabilité de trois manières différentes.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la première boule rouge est tirée au n^{e} tirage et aucune boule verte n'a été tirée avant le n^{e} tirage ». Exprimer l'événement B_n en fonction des événements $(R_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, $(J_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ puis calculer sa probabilité. En déduire la probabilité $P(B)$.

3) En conditionnant par rapport au résultat du premier tirage, retrouver la valeur de $P(B)$. *Indication :* on pourra donner sans calculs les valeurs de $P(B|R_1)$, $P(B|N_1)$ et $P(B|J_1)$.

4) Soit X_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule rouge et X_2 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte.

a) Quelles sont les lois de X_1 et de X_2 ? Quelles sont leur espérance $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{E}(X_2)$?

b) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

c) Quelle est la loi du couple (X_1, X_2) ?

d) Retrouver la valeur de $P(B)$ en calculant la probabilité $P(X_1 < X_2)$.

Ex 3. Lucky Luke *(7 points)*
Lucky Luke est à la poursuite des Dalton. Les Dalton traversent une voie ferrée et se sentant en danger, ils se mettent à tirer sur Lucky Luke. Mais un convoi ferroviaire passe entre eux et Lucky Luke. Ainsi, ce convoi est atteint par un certain nombre de balles qui perforent les flancs latéraux des réservoirs parallélépipédiques des wagons. Le liquide contenu dans chaque réservoir se met à fuir jusqu'au niveau du trou le plus bas dans le flanc du réservoir.

On s'intéresse à un seul réservoir de hauteur h et de longueur l. On note, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $Z_i = (X_i, Y_i)$ le point d'impact de la i^{e} balle sur le réservoir et on suppose que celui-ci est uniformément réparti sur le flanc latéral du réservoir et que les variables aléatoires $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes.

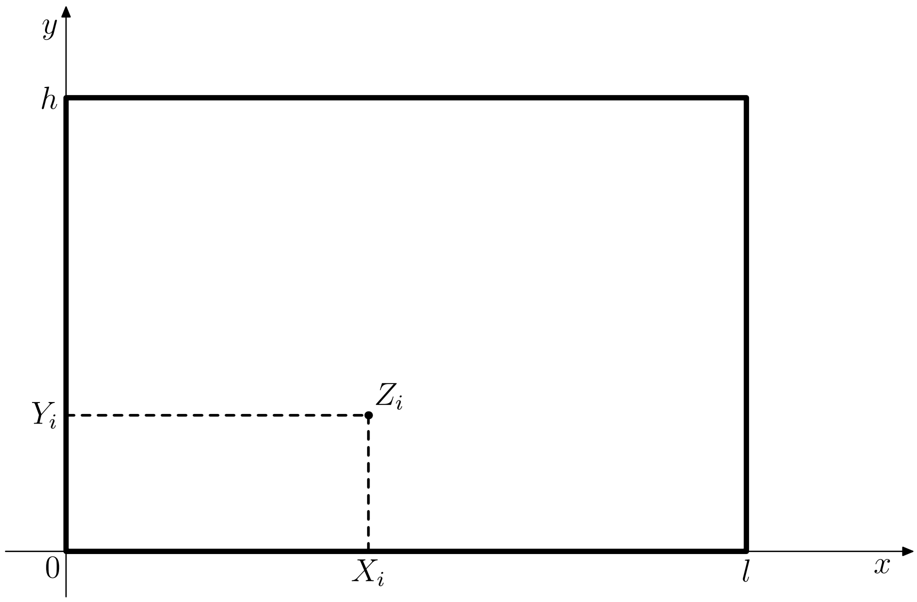

Fig. 2 – Flanc du réservoir

On suppose dans un premier temps, qu'il y a un nombre fixe de balles $n \in \mathbb{N}^*$ qui atteignent le réservoir et on note M_n la variable aléatoire correspondant à la hauteur du liquide restant dans le réservoir après la bataille.

1) Exprimer M_n en fonction des $(Z_i)_{1\leq i\leq n}$ (ou en fonction des X_i, Y_i, $1 \leq i \leq n$).

2) Calculer la fonction de répartition F_n de M_n (qui s'exprimera en fonction de n et de h).

3) Calculer l'espérance $\mathbf{E}(M_n)$ et en déduire le pourcentage de liquide que l'on peut espérer sauver.

On suppose maintenant que le nombre d'impacts sur ce réservoir est une variable aléatoire N qui suit une loi de Poisson de paramètre α avec $\alpha > 0$, et on suppose que N est indépendante des $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. On note M la variable aléatoire correspondant à la hauteur du liquide restant dans le réservoir après la bataille. Attention, il y a une probabilité non nulle qu'aucune balle n'atteigne le réservoir.

4) Exprimer M en fonction des $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ (ou en fonction des X_i, Y_i, $i \in \mathbb{N}^*$) et en fonction de N.

5) Calculer $P(M = h)$.

6) Calculer la fonction de répartition F de M (qui s'exprimera en fonction de h et de α) et tracer son graphe. *Indication :* On commencera par calculer $P(M \leq t|N = n)$ pour tout réel t et tout entier n (en faisant attention au cas où $n = 0$).

7) La loi de la variable aléatoire M est-elle discrète ? à densité ?

8) Calculer l'espérance $\mathbf{E}(M)$ et en déduire le pourcentage de liquide que l'on peut espérer sauver.

« I'am a poor lonesome cowboy... »