Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2008–2009**

Examen

7 janvier 2009, durée : 3 heures

- Ce sujet comporte **2 pages** et quatre exercices indépendants.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours d'IPE, dictionnaire bilingue pour étudiants étrangers.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. Vrai ou faux ? *(4 points)*

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquez si vous la pensez vraie ou fausse en argumentant votre réponse. Si vous répondez « vrai », proposez une démonstration ou une référence à un résultat du cours. Si vous répondez « faux », il suffit de proposer un contre exemple. Seules les réponses argumentées seront prises en compte par les correcteurs.

1) Une intersection *quelconque* (éventuellement infinie non dénombrable) d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

2) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'événements qui converge vers A alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $A = A_n$.

3) Si X est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est continue et si D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ au plus dénombrable alors $P(X \in D) = 0$.

4) Si X est une variable aléatoire strictement positive vérifiant $0 < m \leq X \leq M$ alors X et $\frac{1}{X}$ sont intégrables et on a

$$E\Big(\frac{1}{X}\Big) = \frac{1}{E(X)}.$$

Ex 2. Une histoire de vaches *(3 points)*

Trois vaches Marguerite, Violette et Capucine entrent en même temps dans une étable qui ne comporte que deux mangeoires. Marguerite et Violette se mettent tout de suite à table tandis que Capucine doit attendre que les deux autres aient fini de manger pour être servie. Le temps mis par chacune des vaches pour terminer leur repas sont des variables aléatoires X_1 (pour Marguerite), X_2 (pour Violette) et X_3 (pour Capucine) indépendantes. On suppose que les vaches mettent entre 5 et 10 minutes pour manger leur repas et que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 suivent une loi uniforme sur $[5, 10]$.

On note Y le temps qui s'est écoulé entre l'arrivée des trois vaches et le moment où Capucine peut passer à table grâce au départ de l'une des deux autres. On désigne enfin par Z le temps qui s'est écoulé entre l'arrivée des trois vaches et le moment où Capucine finit son repas.

1) Exprimer la variable aléatoire Y en fonction de X_1 et X_2. En déduire la loi de Y (on donnera sa fonction de répartition et une densité si elle existe). Quelle est son espérance ?

2) Exprimer la variable aléatoire Z en fonction de Y et X_3. Quelle est la loi de Z ?

Ex 3. *(7 points)*
Soit X une variable aléatoire positive dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-at^2} & \text{si} \quad t \geq 0, \end{cases}$$

où a est un paramètre réel strictement positif.

1) Calculer l'espérance de X (en fonction de a) si elle existe.

2) Quelle est la loi de X^2 ? La variable aléatoire X admet-elle une variance ? Si oui, laquelle ?

Soit ϵ une variable aléatoire définie sur le même espace que X, indépendante de X et telle que $P(\epsilon = -1) = P(\epsilon = 1) = \frac{1}{2}$. On définit la variable aléatoire Y par $Y := \epsilon X$.

3) Calculer la fonction de répartition G de Y.

4) Montrer que Y est intégrable et calculer son espérance $\mathbf{E}(Y)$.

5) La variable aléatoire Y admet-elle une variance ? Si oui, laquelle ?

6) Montrer que X et Y sont non-corrélées. Sont-elles indépendantes ?

7) Montrer que la fonction $G : \mathbb{R} \to]0,1[$ est bijective et calculer sa réciproque G^{-1}. En déduire une méthode pour simuler une variable aléatoire $\tilde{Y}$ de même loi que Y à partir d'un tirage aléatoire uniforme sur $[0,1]$ (autrement dit, construire $\tilde{Y}$ à partir d'une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0,1]$ de telle sorte que $\tilde{Y}$ ait même loi que Y).

8) On définit la variable aléatoire $Z := X + Y$. Est-ce que la loi Z peut être une loi à densité ? Donner la loi de Z et tracer sa fonction de répartition.

Ex 4. *(5 points)*
Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $[0,1]$, indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose :

$$Y_1 := X_1 \quad , \quad Y_2 := X_1 X_2 \quad , \ldots , \quad Y_n := X_1 \ldots X_n,$$

et on définit la variable aléatoire

$$Y(\omega) = \lim_{n \to +\infty} Y_n(\omega) \ , \quad \forall \omega \in \Omega.$$

1) Justifier l'existence de Y.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $E(Y_n)$ si elle existe.

3) Dans cette question, on montre que Y est nulle presque surement.

a) Justifier l'intégrabilité de Y, et montrer que $E(Y) = 0$.

b) En déduire que $P(Y = 0) = 1$.

4) On se propose de retrouver le résultat précédent par une autre méthode. Soit $\varepsilon > 0$,

a) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} P(Y_n > \varepsilon) = 0$.

b) En déduire que $P(Y > \varepsilon) = 0$ puis retrouver le résultat de la question 3.b).