Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2006–2007**

Corrigé de l'examen du 18 janvier 2007

Ce document fournit les solutions à certaines questions du sujet avec plus ou moins de détails (à vous de travailler pour compléter les détails qui manquent). L'exercice 4 n'est pas corrigé.

Ex 1. *(4 points) Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité la fonction f dont le graphe est représenté figure 1.*

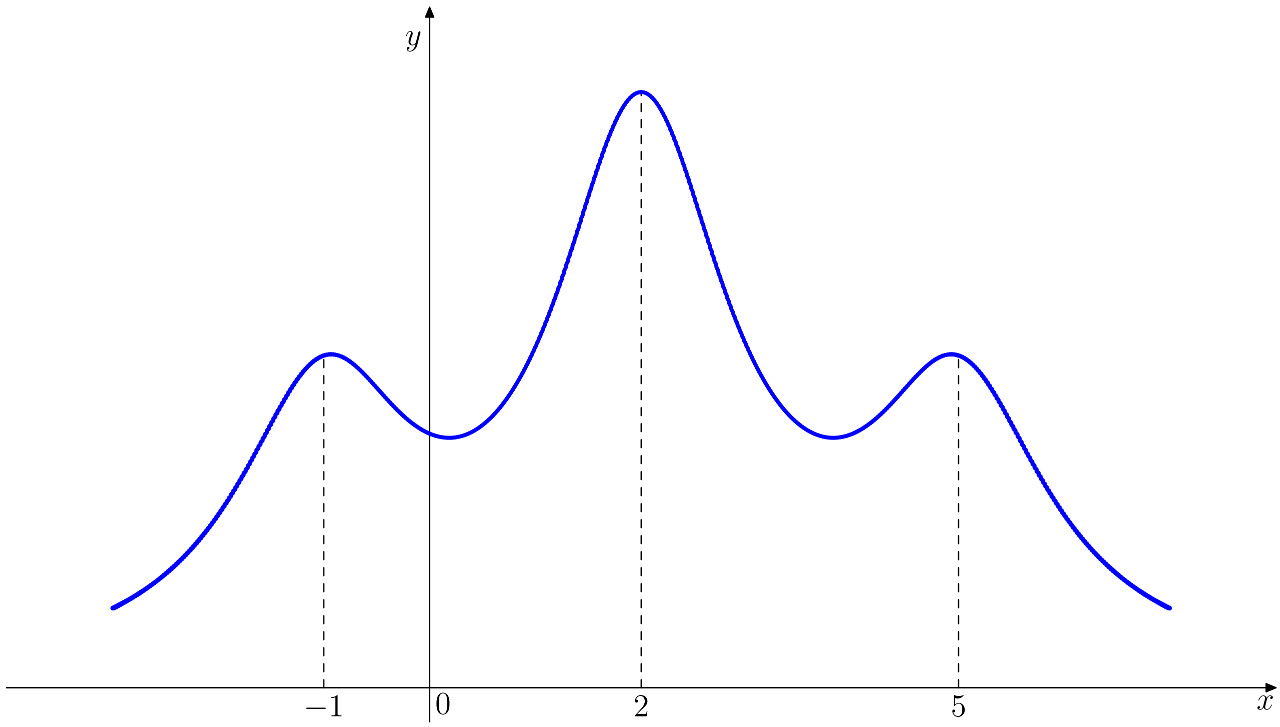

Fig. 1 – Graphe de la densité f

Le graphe de f présente une symétrie dont l'axe est la droite d'équation $x = 2$.

1) On note F la fonction de répartition de X. Que vaut $F(2)$? $F(2) = \frac{1}{2}$.

2) *On sait que $F(-1) = 0,19$.* On en déduit les probabilités suivantes :

$$P(X \geq -1) = 0,81 \quad P(X \in [-1;2]) = 0,31 \quad P(X \geq 5) = 0,19 \quad P(X \in [-1;5]) = 0,62.$$

3) *Ecrire la relation vérifiée par la fonction f traduisant la symétrie de son graphe.* Pour tout réel x, $f(2+x) = f(2-x)$.

4) *En déduire que* $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(2+t) = 1 - F(2-t)$. Pour tout réel t,

$$\begin{aligned} F(2+t) &= \int_{-\infty}^{2+t} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \int_{2+t}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 - \int_t^{+\infty} f(x+2)\,\mathrm{d}x = 1 - \int_t^{+\infty} f(2-x)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{2-t} f(u)\,\mathrm{d}u = 1 - F(2-t). \end{aligned}$$

5) *On suppose que* X *est intégrable, expliquer pourquoi* $\mathbf{E}(X-2) = 0$ *et en déduire l'espérance* $\mathbf{E}(X)$. L'égalité précédente sur la fonction de répartition F (ou sur la densité f) permet de montrer que $X-2$ et $2-X$ sont deux variables aléatoires de même loi. Comme X est intégrable, on en déduit que $Y := X-2$ et $-Y := 2-X$ sont intégrables et donc ces deux variables ont la même espérance (puisqu'elles ont la même loi). Comme $\mathbf{E}(-Y) = -\mathbf{E}(Y)$, on conclut que $\mathbf{E}(Y) = 0$: $\mathbf{E}(X-2) = 0$. Comme l'espérance est linéaire, on en déduit que $\mathbf{E}(X-2) = \mathbf{E}(X) - 2$ d'où $\mathbf{E}(X) = 2$.

Ex 2. *(6 points) Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires positives telles que le couple* (X,Y) *suit la loi uniforme sur* $[0,1] \times [0,2]$. *On se propose de calculer de plusieurs manières l'espérance de la variable aléatoire positive* $Z := X+Y$.

Première méthode : calcul de la fonction de répartition de Z

1) *Calculer la fonction de répartition* H *de* Z.

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{1}{4}t^2 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{4}(2t-1) & \text{si} \quad 1 \le t < 2 \\ 1 - \frac{1}{4}(3-t)^2 & \text{si} \quad 2 \le t < 3 \\ 1 & \text{si} \quad t \ge 3 \end{cases}$$

2) *Tracer le graphe de* H. A vous de le faire !!

3) *Calculer l'espérance de* Z *à l'aide de la fonction de répartition* H *et la représenter sur le graphe de* H. Comme Z est une variable aléatoire positive :

$$\mathbf{E}(Z) = \int_0^{+\infty} (1 - H(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^3 (1 - H(t))\,\mathrm{d}t = \cdots = \frac{3}{2}.$$

Deuxième méthode : calcul de la densité de Z

On pourra utiliser dans la suite le fait que X *suit une loi uniforme sur* $[0,1]$, Y *une loi uniforme sur* $[0,2]$ *et que* X *et* Y *sont indépendantes (sans le redémontrer).*

4) Quelles sont les densités respectives f *et* g *de* X *et* Y *?*

$$f(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,2]}(x).$$

5) *On sait, d'après le cours, que Z est une variable à densité. En calculant un produit de convolution, donner la densité h de Z.* Cette question a été traitée en cours : on obtient

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}(3-x) & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

6) *Contrôler le résultat précédent à l'aide du résultat de la question 1.* Il suffit de vérifier que $h = H'$.

7) *Calculer l'espérance de Z en utilisant la densité h.*

$$\mathbf{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 xh(x)\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{3}{2}.$$

Troisième méthode

8) *Proposer une autre méthode pour calculer l'espérance de Z (sans avoir à calculer la loi de Z).* C'est de loin la méthode la plus simple : par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

Ex 3. *(5 points) Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par :*

$$F_X(t) = \exp(-\mathrm{e}^{-t}) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1) Vérifier que F_X est une fonction de répartition. La fonction F_X est une fonction continue avec une limite nulle en $-\infty$ et une limite égale à 1 en $+\infty$.

2) *Montrer que la loi de X est à densité et donner sa densité f_X.* Comme F_x est de classe C^1, elle admet une densité qui est la dérivée de F_X : $f_X(x) = \exp -t - \mathrm{e}^{-t}$.

On définit la variable aléatoire $Y := (X)_+$ où $(x)_+ := \max(0,x)$ désigne la partie positive d'un réel x.

3) Montrer que la fonction de répartition de Y est donnée par : Pour tout réel t,

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(Y \leq t\ ,\ X < 0) + P(Y \leq t\ ,\ X \geq 0).$$

On distingue ensuite les cas $t < 0$ puis $t \geq 0$ pour obtenir :

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ F_X(t) & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

4) *Tracer sommairement le graphe de cette fonction.* A vous de jouer !!

5) *La loi de la variable aléatoire Y est-elle discrète ? à densité ?* Elle n'est pas discrète car sa fonction de répartition admet un seul saut d'une hauteur différente de 1. Elle n'est pas à densité car sa fonction de répartition n'est pas continue.

6) *Montrer que Y est intégrable et que $0 \leq \mathbf{E}(Y) \leq 1$. Indication : on pourra utiliser l'encadrement suivant $1 - \mathrm{e}^{-u} \leq u$ valable pour tout réel u.* $\mathbf{E}(Y) \geq 0$ car Y est une variable aléatoire positive. Pour obtenir l'autre inégalité, il suffit d'écrire

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^{+\infty} (1 - F_Y(t))\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1,$$

en utilisant l'encadrement $1 - \mathrm{e}^{-u} \leq u$.

Ex 4. *(6 points)* On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires positives indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1 définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire

$$Z_n := \max(X_1, \dots, X_n).$$

1) Quelle est la fonction de répartition F_n de Z_n ?

2) Soit $M > 0$ positif fixé, montrer que la suite $(\{Z_n \geq M\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'événements et en déduire l'égalité $\bigcap_{m\geq n} \{Z_m \geq M\} = \{Z_n \geq M\}$.

3) Calculer alors la probabilité de l'événement $A_M := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} \{Z_m \geq M\}$.

4) On note $A := \bigcap_{M\in\mathbb{N}^*} A_M$. Calculer sa probabilité. Que pouvez-vous en déduire sur le comportement de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

5) *Question facultative :* Montrer qu'à $t \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(t + \ln n) = F_X(t),$$

où F_X est la fonction de répartition définie par (1) de l'exercice 3. *On dit alors que la suite $(Z_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.*