

Examen du 18 janvier 2007

durée : 3 heures

Documents autorisés : photocopié de cours d'IPE. Calculatrices autorisées.

Ce sujet comporte **3 pages** dont 1 figure. Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle. Les exercices sont indépendants.

Ex 1. (4 points) Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité la fonction f dont le graphe est représenté figure 1.

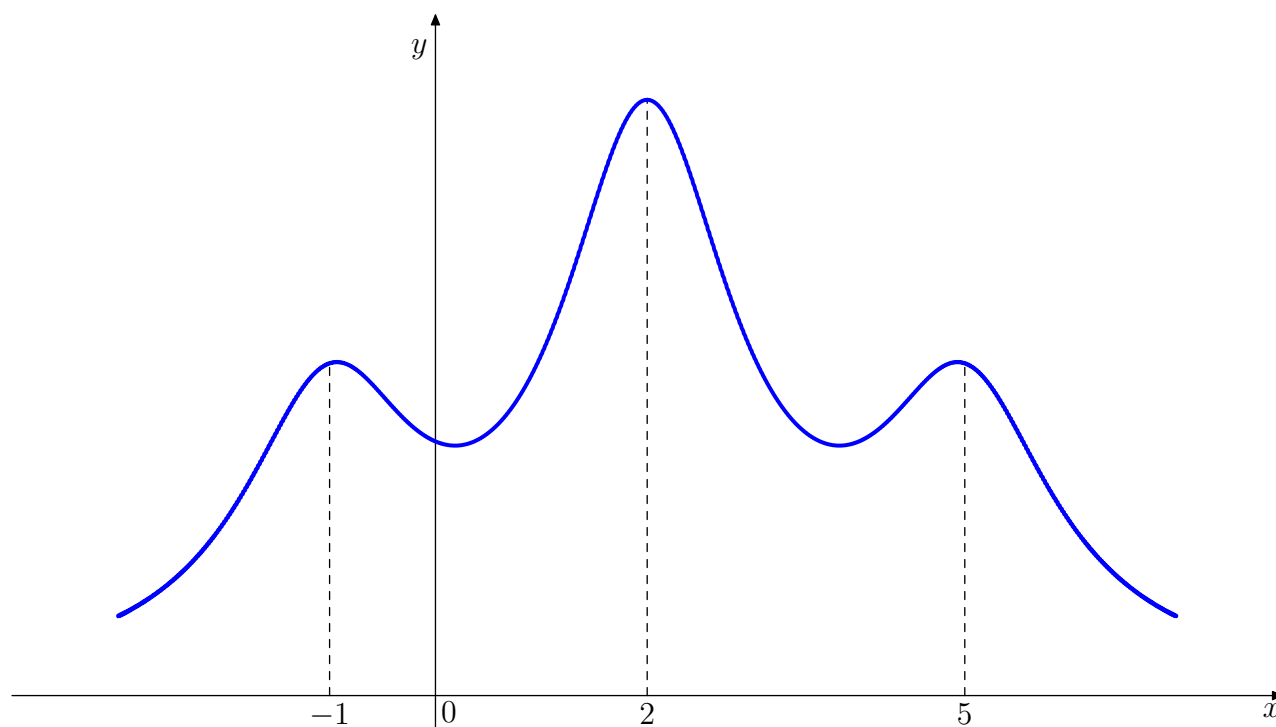


FIG. 1 – Graphe de la densité f

Le graphe de f présente une symétrie dont l'axe est la droite d'équation $x = 2$.

- 1) On note F la fonction de répartition de X . Que vaut $F(2)$?
- 2) On sait que $F(-1) = 0,19$. En déduire les probabilités suivantes

$$P(X \geq -1), \quad P(X \in [-1; 2]), \quad P(X \geq 5), \quad P(X \in [-1; 5]).$$

- 3) Ecrire la relation vérifiée par la fonction f traduisant la symétrie de son graphe.

- 4) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, F(2+t) = 1 - F(2-t)$.
- 5) On suppose que X est intégrable, expliquer pourquoi $\mathbf{E}(X-2) = 0$ et en déduire l'espérance $\mathbf{E}(X)$.

Ex 2. (6 points) Soit X et Y deux variables aléatoires positives telles que le couple (X, Y) suit la loi uniforme sur $[0, 1] \times [0, 2]$. On se propose de calculer de plusieurs manières l'espérance de la variable aléatoire positive $Z := X + Y$.

Première méthode : calcul de la fonction de répartition de Z

- 1) Calculer la fonction de répartition H de Z . *Indication* : on se servira de la loi du couple (X, Y) pour ramener le calcul de $P(X + Y \leq t)$ à un calcul d'aire (pour tout réel t positif fixé).
- 2) Tracer le graphe de H .
- 3) Calculer l'espérance de Z à l'aide de la fonction de répartition H et la représenter sur le graphe de H .

Deuxième méthode : calcul de la densité de Z

On pourra utiliser dans la suite le fait que X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, Y une loi uniforme sur $[0, 2]$ et que X et Y sont indépendantes (sans le redémontrer).

- 4) Quelles sont les densités respectives f et g de X et Y ?
- 5) On sait, d'après le cours, que Z est une variable à densité. En calculant un *produit de convolution*, donner la densité h de Z .
- 6) Contrôler le résultat précédent à l'aide du résultat de la question 1.
- 7) Calculer l'espérance de Z en utilisant la densité h .

Troisième méthode

- 8) Proposer une autre méthode pour calculer l'espérance de Z (sans avoir à calculer la loi de Z).

Ex 3. (5 points) Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F_X(t) = \exp(-e^{-t}) \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

- 1) Vérifier que F_X est une fonction de répartition.
- 2) Montrer que la loi de X est à densité et donner sa densité f_X .
On définit la variable aléatoire $Y := (X)_+$ où $(x)_+ := \max(0, x)$ désigne la partie positive d'un réel x .
- 3) Montrer que la fonction de répartition de Y est donnée par :

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ F_X(t) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

- 4) Tracer sommairement le graphe de cette fonction.
- 5) La loi de la variable aléatoire Y est-elle discrète ? à densité ?

6) Montrer que Y est intégrable et que $0 \leq \mathbf{E}(Y) \leq 1$. *Indication* : on pourra utiliser l'encadrement suivant $1 - e^{-u} \leq u$ valable pour tout réel u .

Ex 4. (6 points) On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires positives indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1 définies sur un même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire

$$Z_n := \max(X_1, \dots, X_n).$$

- 1) Quelle est la fonction de répartition F_n de Z_n ?
- 2) Soit $M > 0$ positif fixé, montrer que la suite $(\{Z_n \geq M\})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'événements et en déduire l'égalité $\bigcap_{m \geq n} \{Z_m \geq M\} = \{Z_n \geq M\}$.
- 3) Calculer alors la probabilité de l'événement $A_M := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} \{Z_m \geq M\}$.
- 4) On note $A := \bigcap_{M \in \mathbb{N}^*} A_M$. Calculer sa probabilité. Que pouvez-vous en déduire sur le comportement de la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
- 5) *Question facultative* : Montrer qu'à $t \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(t + \ln n) = F_X(t),$$

où F_X est la fonction de répartition définie par (1) de l'exercice 3. On dit alors que la suite $(Z_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X .