Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2006–2007**

Examen (première version) du 18 janvier 2007

durée : 3 heures

Documents autorisés : polycopié de cours d'IPE. Calculatrices autorisées.

Ce sujet comporte **3 pages** dont 1 figure. Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle. Les exercices sont indépendants.

Ex 1. *(4 points)* Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité la fonction f dont le graphe est représenté figure 1.

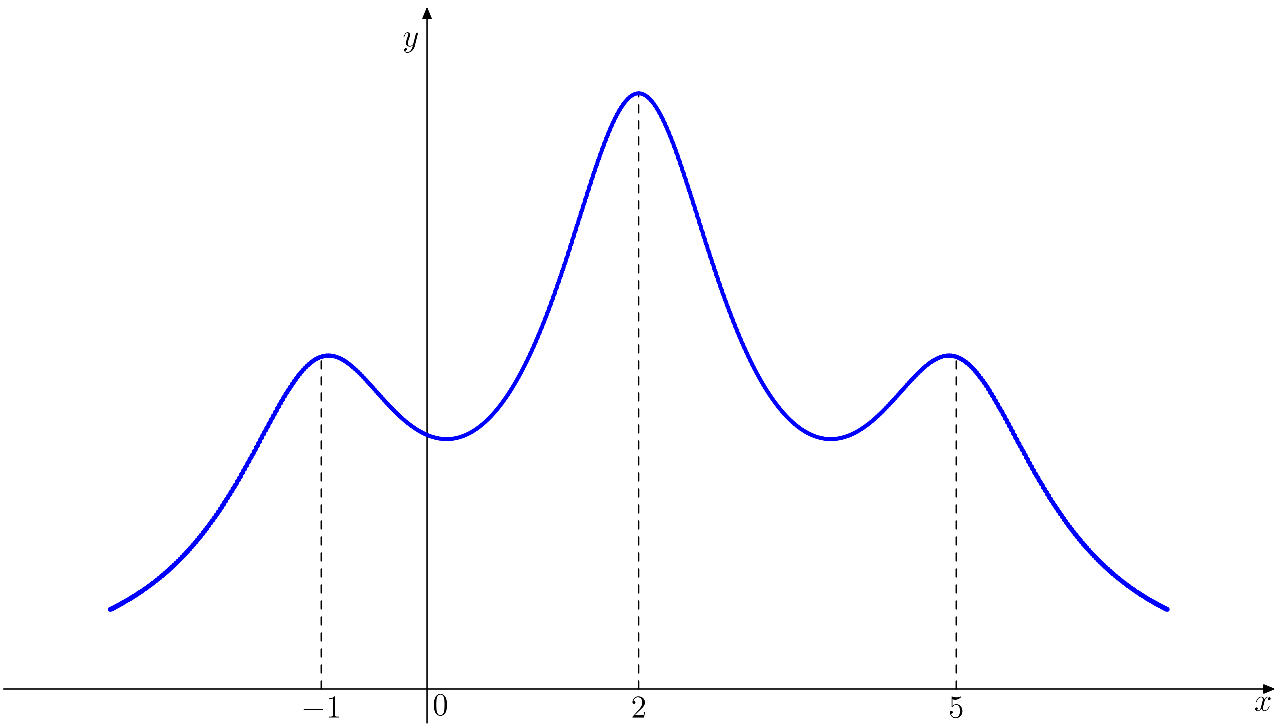

FIG. 1 – Graphe de la densité f

Le graphe de f présente une symétrie dont l'axe est la droite d'équation $x = 2$.

1) On note F la fonction de répartition de X. Que vaut $F(2)$?

2) On sait que $F(-1) = 0,19$. En déduire les probabilités suivantes

$$P(X \geq -1), \quad P(X \in [-1; 2]), \quad P(X \geq 5), \quad P(X \in [-1; 5]).$$

3) Ecrire la relation vérifiée par la fonction f traduisant la symétrie de son graphe.

4) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(2+t) = 1 - F(2-t)$.

5) On suppose que X est intégrable, Quelle est la valeur de l'espérance $\mathbf{E}(X)$?

Ex 2. *(6 points)* Soit X et Y deux variables aléatoires positives telles que le couple (X, Y) suit la loi uniforme sur $[0,1] \times [0,2]$. On se propose de calculer de plusieurs manières l'espérance de la variable aléatoire positive $Z := X + Y$.

Première méthode : calcul de la fonction de répartition de Z

1) Calculer la fonction de répartition H de Z. *Indication :* on se servira de la loi du couple (X, Y) pour ramener le calcul de $P(X + Y \leq t)$ à un calcul d'aire (pour tout réel t positif fixé).

2) Tracer le graphe de H.

3) Calculer l'espérance de Z à l'aide de la fonction de répartition H et la représenter sur le graphe de H.

Deuxième méthode : calcul de la densité de Z

On pourra utiliser dans la suite le fait que X suit une loi uniforme sur $[0,1]$, Y une loi uniforme sur $[0,2]$ et que X et Y sont indépendantes (sans le redémontrer).

4) Quelles sont les densités respectives f et g de X et Y ?

5) On sait, d'après le cours, que Z est une variable à densité. En calculant un *produit de convolution*, donner la densité h de Z.

6) Contrôler le résultat précédent à l'aide du résultat de la question 1.

7) Calculer l'espérance de Z en utilisant la densité h.

Troisième méthode

8) Proposer une autre méthode pour calculer l'espérance de Z (sans avoir à calculer la loi de Z).

Ex 3. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F_X(t) = \exp(-\mathrm{e}^{-t}) \quad \text{pour}\, t \in \mathbb{R}.$$

1) Vérifier que F_X est une fonction de répartition.

2) Montrer que la loi de X est à densité et donner sa densité f_X.

On définit la variable aléatoire $Y := (X + \ln \alpha)_+$ où α est un réel strictement positif et $(x)_+ := \max(0, x)$ désigne la partie positive d'un réel x.

3) Montrer que la fonction de répartition de Y est donnée par :

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ F_X(t - \ln \alpha) & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

4) Tracer sommairement le graphe de cette fonction.

5) La loi de la variable aléatoire Y est-elle discrète ? à densité ?

6) Montrer que Y est intégrable et que $0 \leq \mathbf{E}(Y) \leq \alpha$.

Ex 4. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires positives indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1 définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $Z_n := \max(X_1, \dots, X_n)$.

a) Quelle est la fonction de répartition de Z_n ?

b) Soit $M > 0$ positif fixé, montrer que la suite $(\{Z_n \geq M\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'événements et en déduire l'égalité $\bigcap_{m\geq n} \{Z_m \geq M\} = \{Z_n \geq M\}$.

c) Calculer alors la probabilité de l'événement $A_M := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} \{Z_m \geq M\}$.

d) On note $A := \bigcap_{M\in\mathbb{N}^*} A_M$. Calculer sa probabilité. Que pouvez-vous en déduire sur le comportement de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

2) Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre α définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et indépendante de la suite des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On définit la variable aléatoire Z par, pour $\omega \in \Omega$,

$$Z(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad N(\omega) = 0 \\ \max\left\{X_1(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega)\right\} & \text{si} \quad N(\omega) \geq 1, \end{cases}$$

a) Pour tout réel t et tout entier $n \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $P(Z \leq t | N = n)$. *Indication* : on pourra traiter à part le cas $n = 0$.

b) En déduire la fonction de répartition de Z et montrer que Z a la même loi que la variable aléatoire Y définie à l'exercice 3.