Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math314 **Année 2010**

Partiel, 2 avril 2010, durée 2 heures.

- Ce sujet comporte **4 pages**, dont une table de la loi normale.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours IPE, polycopié du cours d'IS, dictionnaire bilingue pour étudiants étrangers.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. *(3 points)*

On note $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour tout $n \geq 1$. On suppose vérifiées les conditions suivantes.

i) Il existe une variable aléatoire intégrable Z telle que pour tout $k \geq 1$, $|X_k| \leq Z$ p.s.

ii) Les X_k ont même espérance.

iii) $\dfrac{S_n}{n}$ converge presque-sûrement quand n tend vers l'infini vers un réel a.

1) Montrez que la convergence de $\dfrac{S_n}{n}$ vers a a lieu aussi au sens L^1, autrement dit :

$$\mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

2) En déduire que $a = \mathbf{E}X_1$.

3) Montrez qu'en particulier les conditions i) et ii) sont satisfaites lorsque les X_k sont de même loi vérifiant $P(|X_1| \leq c) = 1$ pour une certaine constante c.

Ex 2. *Convergence p.s. de séries (5 points)*

On note $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite de réels.

1) On suppose que les séries

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_k \neq a_k)$$

sont convergentes. Montrez qu'alors la série $\sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ converge presque sûrement. Indication : on peut utiliser le lemme de Borel-Cantelli pour voir que le comportement de X_k devient très « stable » à partir d'un certain rang k_0 ... aléatoire.

2) Que peut-on dire si $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge et $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_k \neq a_k)$ converge ?

3) On suppose que pour $k \geq 1$, X_k suit la loi de Poisson de paramètre λ_k et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k$ converge. Montrez que $\sum_{k=1}^{+\infty} X_k$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire S à valeurs entières. Que pouvez vous dire de l'intégrabilité de S et le cas échéant, de son espérance ?

Ex 3. *Surréservation aérienne (6 points)*

Il arrive assez souvent que le nombre de réservations pour une liaison aérienne soit supérieur au nombre de passagers se présentant effectivement le jour du vol. Cela est dû à des empêchements imprévisibles de certains passagers et à une politique systématique de certains d'entre eux qui réservent des places sur plusieurs vols de façon à choisir au dernier moment celui qui leur convient le mieux (en raison de la concurrence, les compagnies ne pénalisent pas les clients qui se désistent et ne font payer effectivement que ceux qui embarquent). Pour compenser ce phénomène, une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation (*surbooking*) en prenant pour chaque vol un nombre $n > 300$ de réservations. S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

1) On considère que les passagers sont mutuellement indépendants et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est 10%. On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné et S_n le nombre (aléatoire) de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol. Donnez la loi *exacte* de S_n et déduisez en sans calcul les valeurs de $\mathbf{E}S_n$ et $\operatorname{Var} S_n$.

2) Le directeur commercial de la compagnie aimerait connaître la valeur maximale de n telle que : $P(S_n \leq 300) \geq 0{,}99$. En utilisant le théorème de De Moivre-Laplace, proposez lui une solution approchée de ce problème.

Ex 4. *Temps d'attente : du discret au continu (6 points)*

On souhaite mesurer le temps d'attente d'un certain évènement aléatoire, par exemple le premier éclair d'un orage. On dispose d'une horloge H_0 pour mesurer ce temps d'attente. La durée observée sera toujours un multiple entier de la plus petite durée u_0 mesurable par l'horloge H_0. On découpe alors le temps en intervalles $[0, u_0[$, $[u_0, 2u_0[$, $[2u_0, 3u_0[$, etc. Si l'évènement que l'on attend se produit pour la première fois dans l'intervalle de temps $[ku_0, (k+1)u_0[$, $k \in \mathbb{N}$, son temps d'attente mesuré par notre horloge aura été ku_0. Si l'on remplace H_0 par une horloge dix fois plus précise H_1, la plus petite unité de temps mesurable sera $u_1 = u_0/10$ et le temps d'attente observé sera l'un des 10 nombres $10ku_1$, $(10k+1)u_1$, $\ldots$, $(10k+9)u_1$.

Prenons comme unité de départ $u_0 = 1$ seconde et notons $A_{[s,t[}$, l'évènement « il n'y a pas d'éclair pendant l'intervalle $[s, t[$ ». On suppose ici que s et t sont des réels $(0 \leq s < t)$ mesurant le temps en secondes avec une précision infinie, ce qui est évidemment inaccessible à l'expérience. Nous ferons les hypothèses suivantes :

a) Les $A_{[s,t[}$ indexés par des intervalles de temps 2 à 2 disjoints sont indépendants ;

b) Pour tout réels $0 \leq s < t$, $P(A_{[s,t[})$ ne dépend que de la durée $t - s$. Autrement dit, il existe une fonction $h : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ telle que $P(A_{[s,t[}) = h(t-s)$.

1) Soit X_0 le temps d'attente du premier éclair mesuré par l'horloge H_0. La variable aléatoire discrète X_0 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour trouver sa loi, on remarque d'abord que $p_0 := P(X_0 = 0) = P(A^c_{[0,1[}) = 1 - h(1)$. Expliquez brièvement la décomposition

$$\{X_0 = k\} = \Big(\bigcap_{i=1}^{k} A_{[i-1,i[} \Big) \cap A^c_{[k,k+1[}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

et déduisez en l'expression de $P(X_0 = k)$ en fonction de p_0 et de $q_0 = 1 - p_0$. On suppose désormais que $0 < q_0 < 1$. Vérifiez que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$P(X_0 > x) = P(X_0 > [x]) = q_0^{[x]+1}, \tag{1}$$

où l'on a noté $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique entier k tel que $k \leq x < k+1$.

2) Maintenant, supposons que l'on dispose d'une suite d'horloges (ou chronomètres) H_n où la plus petite unité de temps mesurable par H_n est $u_n = 10^{-n}$ secondes. Notons X_n le temps d'attente du premier éclair mesuré par cette horloge dans l'unité u_n. Notons Y_n ce même temps d'attente converti en secondes. Par exemple avec $n = 3$, si l'on observe $X_3(\omega) = 5\,347$ (millièmes de seconde), on aura $Y_3(\omega) = 5{,}347$ (secondes), $X_2(\omega) = 534$ (centièmes de seconde), $Y_2(\omega) = 5{,}34$ (secondes), $X_1(\omega) = 53$ (dixièmes de secondes), $Y_1(\omega) = 5{,}3$ (secondes) et $X_0(\omega) = Y_0(\omega) = 5$ (secondes). Il est clair que la loi de X_n se calcule comme celle de X_0 en remplaçant q_0 par $q_n = h(10^{-n})$ et p_0 par $p_n = 1 - q_n$ (on ne vous demande pas de refaire ce calcul). Vérifiez que

$$h(1) = h(10^{-n})^{10^n}.$$

Pour alléger les écritures, notons $h(1) = \exp(-a)$, ce qui est toujours possible avec un paramètre $a > 0$ puisque $0 < h(1) < 1$. Avec cette notation, $q_n = h(10^{-n}) = \exp(-a10^{-n})$.

3) En utilisant (1) avec q_n à la place de q_0, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$P(Y_n > x) = P(X_n > 10^n x) = q_n^{[10^n x]+1} = \exp\big(-a10^{-n}([10^n x] + 1)\big).$$

Trouvez la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini (x étant fixé). Déduisez-en que la suite (Y_n) converge en loi vers une v.a. Y suivant une loi bien connue.

4) Quel est le sens de variation de la suite de réels $(Y_n(\omega))_{n\geq 1}$? Montrez que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge presque-sûrement.

Table des valeurs de Φ, f.d.r. de la loi normale standard $\mathfrak{N}(0,1)$

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \mathrm{d}t, \quad Z \sim \mathfrak{N}(0,1).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986