Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math314 **Année 2009**

Partiel, 17 avril 2009, durée 2 heures.

- Ce sujet comporte **4 pages**, dont une table de la loi normale.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle. Il est surdimensionné *a priori* pour tenir compte de la longueur du sujet relativement à la durée de l'épreuve.
- Documents autorisés : polycopié du cours IPE, polycopié du cours d'IS, dictionnaire bilingue pour étudiants étrangers.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. *Dé et compensations exactes (4 points)*

On lance indéfiniment un dé équilibré. On dit qu'un lancer réalise une compensation exacte si une fois ce lancer effectué, chacune des faces du dé est apparue le même nombre de fois depuis le début des lancers. Pour n entier, on note E_n l'évènement « le lancer n° $6n$ » réalise une compensation exacte [1].

1) Donner sans démonstration l'expression de $P(E_n)$ obtenue en notant que le vecteur des nombres d'apparition des faces suit une loi multinomiale.

2) On rappelle que par la formule de Stirling, $k!$ est équivalent à $\sqrt{2\pi}k^{k+1/2}\mathrm{e}^{-k}$ quand k tend vers l'infini. En déduire un équivalent de $P(E_n)$ quand n tend vers l'infini.

3) Montrer que presque-sûrement, dans une suite infinie de lancers d'un dé équilibré, il ne se produit qu'un nombre fini de compensations exactes.

Ex 2. *Dé, TLC et correction de Berry-Esséen (8 points)*

1) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Calculer $\mathbf{E}X$ et $\operatorname{Var} X$.

2) On effectue 3 600 lancers d'un dé équilibré et on note X_i le nombre de points indiqués par le dé au i^{e} lancer, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ le nombre total de points en n lancers. Proposez un entier k minimal tel que :

$$P(S_{3\,600} > k) \leq 0{,}05, \tag{1}$$

en négligeant l'erreur d'approximation gaussienne sur la probabilité. Pour les étudiants ayant oublié leur calculatrice, on donne $\sqrt{35/12} \simeq 1{,}708$.

1. Il est évidemment impossible d'observer une compensation exacte lors d'un lancer dont le numéro n'est pas multiple de 6.

3) On rappelle l'inégalité de Berry-Esséen pour une somme S_n de variables aléatoires i.i.d. (vérifiée sous l'hypothèse de finitude de $\mathbf{E}|X_1|^3$) :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |P(S_n^* \leq x) - \Phi(x)| \leq C\frac{\rho^3}{\sigma^3}\frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{2}$$

où σ est l'écart-type de X_1, $\rho^3 = \mathbf{E}|X_1 - \mathbf{E}X_1|^3$, $S_n^* = (S_n - n\mathbf{E}X_1)(\sigma n)^{-1/2}$ et Φ est la fonction de répartition de la loi gaussienne $\mathfrak{N}(0,1)$. Une valeur possible pour la constante universelle C est 0,797 5 (si vous n'avez pas de calculatrice, contentez vous de $C = 0{,}8$). Calculez explicitement le coefficient de $1/\sqrt{n}$ au second membre de (2) lorsque S_n est la somme des points d'un dé définie à la question 2.

4) Utilisez ceci pour majorer l'erreur d'approximation gaussienne commise à la question 2 et pour corriger la valeur de k obtenue.

Ex 3. *Une marche aléatoire dans* $\mathbb{R}^2$ *(12 points)*

On se propose d'étudier le comportement asymptotique de la trajectoire d'une particule qui partie de O, choisit à chaque instant $k \in \mathbb{N}$ une direction au hasard et parcourt une distance 1 dans cette direction, avant de choisir une nouvelle direction à l'instant $k+1$. Les questions 1) et 2) sont des préliminaires qui peuvent se traiter comme des exercices indépendants. Commencez par lire l'énoncé jusqu'au bout et par repérer les questions qui peuvent se traiter facilement en admettant le résultat de la question précédente.

1) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. On pose $X = \cos U$, $Y = \sin U$. Calculez l'espérance et la matrice de covariance du vecteur aléatoire (X, Y). X et Y sont-elles indépendantes ?

2) Soit $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi et h une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. Montrez que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(U_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \mathbf{E}h(U_1). \tag{3}$$

3) Revenant à la marche aléatoire décrite en introduction, on note M_n la position occupée par la particule à l'instant n, avec $M_0 = O = (0,0)$. En notant S_n et T_n les coordonnées de M_n dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$, on a donc

$$M_n = (S_n, T_n), \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos U_k, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \sin U_k,$$

où $(U_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ représentant la succession des choix de direction « au hasard ». En vous appuyant sur les questions préliminaires, expliquez pourquoi presque-sûrement, la distance OM_n est un $o(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

4) Montrez en utilisant le TLC vectoriel que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n, T_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} W, \tag{4}$$

où W est un vecteur aléatoire de loi gaussienne $\mathfrak{N}(\mu, K)$ avec :

$$\mu = (0,0), \qquad K = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Expliquez pourquoi W est à composantes indépendantes et à densité

$$f : (x,y) \longmapsto \frac{1}{\pi} \exp\big(-(x^2+y^2)\big).$$

5) Soit D_r le disque de centre O et de rayon r. Calculez explicitement $P(W \in D_r)$.

6) La signification pratique du résultat de la question 3 est que pour n « grand », le point M_n va se trouver dans un disque de centre O et de rayon *très inférieur* à n. Utilisez les deux questions précédentes pour préciser ce résultat en montrant que $P(OM_n \leq r\sqrt{n})$ converge vers $1 - \exp(-r^2)$ quand n tend vers l'infini.

7) Voici une petite application numérique en guise d'illustration. On prend comme unité 1 cm (distance parcourue par la particule entre deux changements de direction). À quelle distance maximale de O peut se trouver théoriquement le point $M_{10\,000}$? Dans quel disque minimal allez vous le chercher si vous souhaitez le localiser avec une probabilité de succès de 99% ?

Table des valeurs de Φ, f.d.r. de la loi normale standard $\mathfrak{N}(0,1)$

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \mathrm{d}t, \quad Z \sim \mathfrak{N}(0,1).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986