Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math314 **Année 2008**

Partiel, 5 avril 2008, durée 2 heures.

- Ce sujet comporte **2 pages**.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours IPE, polycopié du cours d'IS, dictionnaire bilingue pour étudiants étrangers.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. *Une convergence L^1 (4 points)*

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et de même loi et telle que $\mathbf{E}|X_1| < +\infty$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. On note $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrez que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left|h\big(n^{-1}S_n\big) - h\big(\mathbf{E}X_1\big)\right| = 0.$$

Ex 2. *Records et loi des grands nombres (12 points)*

On note X une variable aléatoire positive dont la loi vérifie $P(X > t) = t^{-r}$ pour tout réel $t \geq 1$. Dans tout l'exercice, on suppose que la constante r est dans $]0,1[$. On note $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, de même loi que X et on pose :

$$M_n := \max_{1\leq k\leq n} X_k, \qquad S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Que vaut $P(X > 1/2)$? Que vaut $\mathbf{E}X$?

2) Calculez la fonction de répartition de M_n.

3) Montrez que $n^{-1/r}M_n$ converge en loi quand n tend vers $+\infty$ vers une variable aléatoire positive Z dont vous donnerez la fonction de répartition.

4) Justifiez la convergence de série à termes positifs :

$$\forall\delta > 0, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n^{\delta}) < +\infty.$$

5) Soit a une constante telle que $0 < a < 1/r$. Montrez que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(M_n \leq n^a) < +\infty.$$

6) En déduire que presque-sûrement $M_n > n^a$ pour tout $n \geq N$, où N est un rang aléatoire.

7) En prenant $a > 1$, en déduire que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{p.s.}} +\infty.$$

Ceci contredit-il la loi forte des grands nombres ?

8) Montrez qu'en fait

$$\frac{S_n}{n^c} \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{p.s.}} +\infty,$$

pour tout exposant c tel que $0 < c < 1/r$.

Ex 3. *Convergences de moyennes géométrique (6 points)*

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé, à valeurs dans $]0, +\infty[$, indépendantes, de même loi telle que $\mathbf{E}|\ln X_1| < +\infty$. On note $b := \mathbf{E} \ln X_1$.

1) On note $T_n = X_1 \dots X_n$ le produit des n premières variables aléatoires de la suite $(X_k)_{k \geq 1}$. La moyenne géométrique de ces variables est alors $T_n^{1/n}$. Montrez que cette moyenne géométrique converge presque sûrement quand n tend vers $+\infty$ vers une constante que vous exprimerez en fonction de b.

2) Calculez cette limite dans le cas des v.a. X_k de l'exercice précédent.

3) On revient au cas général et on pose $Y_k := \mathrm{e}^{-b} X_k$ et $R_n := Y_1 \dots Y_n$. Vérifiez que $R_n^{1/n}$ converge presque-sûrement vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

4) On suppose de plus que $\ln X_1$ est de carré intégrable. Montrez que $R_n^{1/\sqrt{n}}$ converge *en loi* vers une variable aléatoire W qui s'exprime comme fonction d'une v.a. de loi classique. La loi de W est appelée *log-normale.*