Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math314 **Année 2007**

Partiel, 30 mars 2006, durée 2 heures.

- Ce sujet comporte **4 pages**, incluant une table de la f.d.r. gaussienne standard.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours IPE, polycopié du cours d'IS, dictionnaire bilingue pour étudiants étrangers.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. *Loi de Cauchy et L.F.G.N. (6 points)*

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des moyennes arithmétiques d'une suite de v.a. indépendantes et de même loi de Cauchy. Toutes les variables aléatoires intervenant dans l'énoncé sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1) Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi de Cauchy de densité :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad t \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, exprimez $P(X > n)$ à l'aide d'une intégrale. Déduisez en la minoration :

$$\forall n \geq 1, \quad P(X > n) \geq \frac{1}{2\pi n}.$$

2) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose

$$A := \{\omega \in \Omega;\ X_k(\omega) > k \text{ pour une infinité d'indices } k\}.$$

Expliquez pourquoi $P(A) = 1$.

3) Déduire de ce qui précède que la suite $(X_k)_{k\geq 1}$ ne vérifie pas la loi forte des grands nombres. *Indication :* en posant comme d'habitude $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, exprimez $\frac{X_n}{n}$ en fonction de $\frac{S_n}{n}$ et $\frac{S_{n-1}}{n-1}$ et raisonnez par l'absurde en supposant que S_n/n converge p.s. vers une certaine variable aléatoire Y (pas forcément constante).

4) Ce résultat est-il contradictoire avec le théorème « loi forte des grands nombres » vu en cours ?

Ex 2. *Consommation de carburant (4 points)*

Dans une étude statistique de la consommation de carburant d'un modèle d'automobile, on a relevé les consommations (en litres aux 100 km) pour un échantillon de 100 conducteurs sur le même trajet (tableau 1). La consommation de carburant est une variable aléatoire X de loi inconnue et on peut interpréter ce tableau comme les observations $X_1(\omega), \dots, X_{100}(\omega)$ d'une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On s'intéresse à la quantité $p := P(X > 7{,}5)$.

1) Proposez une valeur numérique pour estimer p en justifiant votre choix.

2) Proposez un intervalle de confiance au niveau 95% pour p en utilisant la méthode avec majoration de la variance inconnue d'une certaine loi de Bernoulli qui apparaît naturellement dans ce problème.

7,641	7,329	7,509	7,572	6,910	7,028	7,429	6,931	6,025	6,589
7,542	6,969	7,473	7,779	7,537	7,013	7,848	6,668	7,327	6,172
6,406	7,467	6,980	6,297	6,698	6,478	6,828	6,630	6,767	7,018
6,796	6,934	7,342	6,673	7,666	7,001	6,862	7,028	7,160	6,807
6,469	7,495	7,656	6,616	7,235	5,974	6,947	5,884	6,913	7,384
7,193	7,293	7,582	7,979	7,668	6,885	7,069	6,650	6,096	6,853
7,954	7,196	6,360	7,747	7,824	6,270	6,662	7,434	6,426	6,888
6,494	7,562	7,216	7,868	7,188	7,562	8,107	6,284	6,626	6,915
6,800	7,726	6,613	7,423	6,524	6,280	7,530	5,984	6,664	7,870
6,867	6,799	6,699	6,649	6,274	6,872	7,519	6,833	6,643	6,413

TAB. 1 – Consommation de carburant de 100 conducteurs en litres aux 100 km

Ex 3. *Quel candidat est en tête ? (6 points)*

1) Justifiez brièvement la formule $\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cap B}$, valable pour deux sous-ensembles quelconques A et B du même espace Ω.

2) Soient A et B deux évènements disjoints ($A \cap B = \emptyset$). On note $p_1 := P(A)$, $p_2 := P(B)$ et on définit la variable aléatoire

$$X := \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B.$$

On suppose de plus que p_1 et p_2 sont strictement positifs. Calculez $\mathbf{E}X$, $\mathbf{E}X^2$ et vérifiez que

$$\sigma^2 := \operatorname{Var} X = p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2) + 2p_1p_2.$$

En déduire l'encadrement $0 < \operatorname{Var} X \leq 1$.

3) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et pour tout $n \geq 1$, $S_n := X_1 + \dots + X_n$. Que peut-on dire de la convergence en loi de

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\Big(\frac{S_n}{n} - (p_1 - p_2)\Big)$$

quand n tend vers l'infini ?

4) Pour une élection, 5 candidats A, B, C, D, E sont en concurrence. Dans un sondage sur 1 000 électeurs choisis au hasard dans la population totale, 370 déclarent voter pour A, 340 pour B, 154 pour C, 122 pour D et 14 pour E. On note $p_1, \dots, p_5$, les proportions inconnues respectives d'électeurs de $A, \dots, E$ dans la population totale. Utilisez ce qui précède pour proposer un intervalle de confiance au niveau 98% pour $p_1 - p_2$. Peut-on en conclure qu'il y a 98% de chances que A devance B le jour de l'élection ?

Ex 4. *Quel candidat est en tête ? par le TLC vectoriel (4 points)*

1) Pour tout $n \geq 1$, soit $N_n = (N_{n,1}, \dots, N_{n,d})$ un vecteur aléatoire suivant la loi multinomiale de paramètres n et $p = (p_1, \dots, p_d)$. Utilisez le théorème limite central vectoriel pour montrer que pour toutes constantes a et b, la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles définies par

$$Y_n := \sqrt{n}\Big(a\frac{N_{n,1}}{n} + b\frac{N_{n,2}}{n} - (ap_1 + bp_2)\Big)$$

converge en loi vers une gaussienne Y dont vous donnerez l'espérance et la variance.

2) Expliquez comment ceci permet de retrouver les résultats des deux dernières questions de l'exercice précédent.

Table des valeurs de Φ, f.d.r. de la loi normale standard $\mathfrak{N}(0,1)$

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \mathrm{d}t, \quad Z \sim \mathfrak{N}(0,1).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986