Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math314 **Année 2006**

Partiel, 12 mai 2006, durée 2 heures.

- Ce sujet comporte **3 pages**, incluant une table de la f.d.r. gaussienne standard.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours IPE, polycopié chapitre 1 du cours d'IS.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. *Pêche scientifique (3 points)*

Une rivière contient un très grand nombre d'écrevisses. On en pêche 900, une par une en notant si elle est parasitée avant de la relâcher et de pêcher la suivante. On observe ainsi 240 écrevisses parasitées. Donnez un intervalle de confiance au niveau 98% pour la proportion inconnue p d'écrevisses parasitées dans la rivière.

Ex 2. *Encore une question de dé (3 points)*

On lance n fois un dé équilibré et on note S_n le nombre de « six » obtenus. Écrivez S_n comme la somme de n v.a. de Bernoulli dont vous préciserez le paramètre, l'espérance et la variance. En utilisant l'approximation fournie par le théorème de de Moivre Laplace, déterminez à partir de quelle valeur de n, l'inégalité $|S_n/n - 1/6| < 0,01$ est vérifiée avec une probabilité d'au moins 90%.

Ex 3. *Différence de sommes (5 points)*

On suppose que les deux suites de variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ et $(Y_i)_{i\geq 1}$ sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et vérifient les hypothèses suivantes :

a) chacune de ces suites est i.i.d. ;

b) X_i et Y_i sont de carré intégrable, $\mathbf{E}X_i =: m_1$, $\mathbf{E}Y_i =: m_2$, $\operatorname{Var} X_i =: \sigma_1^2 > 0$, $\operatorname{Var} Y_i =: \sigma_2^2 > 0$;

c) les suites $(X_i)_{i\geq 1}$ et $(Y_i)_{i\geq 1}$ sont indépendantes l'une de l'autre, ce qui implique notamment que pour toute fonction mesurable $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(g(X_i, Y_i))_{i\geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes et aussi que pour tout $i \geq 1$, X_i et Y_i sont indépendantes.

On pose pour tout $n \geq 1$,

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad T_n := \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

1) On suppose que $m_2 > m_1$. Expliquez pourquoi

$$W_n := \frac{1}{\sqrt{n}}(T_n - S_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} +\infty.$$

Indication : pensez à la loi forte des grands nombres.

2) On suppose maintenant que $m_1 = m_2$. On pose $Z_1 := Y_1 - X_1$. Quelle est la variance de Z_1 ? Montrez que W_n converge en loi vers une v.a. gaussienne dont on précisera les paramètres.

Ex 4. *Convergences p.s. de produits (10 points)*

1) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. On supposera pour simplifier que U est à valeurs dans $]0,1[$: pour tout $\omega \in \Omega$, $0 < U(\omega) < 1$. On pose

$$X := -\ln U.$$

Calculez la fonction de survie G de X, donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = P(X > x).$$

En déduire que X a pour espérance 1. Quel nom porte la loi de X ?

2) Soit $(U_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $]0,1[$, indépendantes et de même loi uniforme sur $]0,1[$. Pour tout $n \geq 1$, on note M_n la *moyenne géométrique* de $U_1, \dots, U_n$, définie par

$$M_n := \left(\prod_{i=1}^n U_i\right)^{1/n}.$$

Montrez que M_n converge presque-sûrement vers e^{-1} quand n tend vers l'infini.

Dans la suite de l'exercice, on propose deux méthodes pour montrer la convergence p.s. vers 0 *de*

$$T_n := \prod_{i=1}^n U_i = M_n^n.$$

3) Grâce à la question 2, montrez que presque-sûrement à partir d'un certain rang (aléatoire), $M_n < 2/\mathrm{e}$. En déduire que T_n converge p.s. vers 0.

4) Voici une deuxième méthode qui n'utilise pas la question 2.

a) Montrez par un argument d'analyse élémentaire que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite de nombres réels $(T_n(\omega))_{n\geq 1}$ converge dans $[0,1[$. Expliquez en une ligne pourquoi ceci permet de définir une *variable aléatoire* T en posant

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) := \lim_{n\to+\infty} T_n(\omega).$$

b) Calculez $\mathbf{E}T_n$ et donnez sa limite quand n tend vers l'infini. En déduire la convergence en probabilité de T_n vers 0.

c) Conclure en utilisant l'unicité de la limite en probabilité modulo l'égalité presque-sûre (on ne vous demande pas de justifier cette unicité).

Table des valeurs de Φ, f.d.r. de la loi normale standard $\mathfrak{N}(0,1)$

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \mathrm{d}t, \quad Z \sim \mathfrak{N}(0,1).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986