Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math314 **Année 2004-2005**

Partiel, 1^er avril 2005, durée 2 heures.

- Ce sujet comporte 4 pages, incluant une table de la f.d.r. gaussienne standard.
- Documents autorisés : polycopié du cours IPE, polycopié Simulation, notes manuscrites du cours d'IS.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. *Pétition pour internautes (5 points)*

1) On rappelle que la loi exponentielle de paramètre $a > 0$ admet pour densité

$$f : t \longmapsto a\mathrm{e}^{-at}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t).$$

On rappelle aussi que la fonction Γ est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\Gamma(r) := \int_0^{+\infty} t^{r-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre a. Montrer que $\mathbf{E}(X^n)$ est fini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer ce moment en fonction de a et de n. En déduire que

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{a}, \qquad \operatorname{Var} X = \frac{1}{a^2}.$$

2) Une nouvelle pétition internationale contre les brevets logiciels est lancée sur le Web. Dans une conférence de presse, les initiateurs procèdent à la mise en ligne du texte de la pétition et du formulaire de signature et annoncent qu'à partir de cet instant, ils espèrent recueillir les 10 000 premières signatures en moins d'une semaine, *i.e.* en moins de 7 journées de 24 heures[1].

L'expérience d'une pétition précédente permet aux initiateurs de considérer que les temps d'attente (en minutes) entre les enregistrements de deux signatures consécutives sont des variables aléatoires X_i indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $a = 1$ mn^{-1}, donc $\mathbf{E}X_i$ vaut une minute. Avec ces notations, l'instant d'enregistrement de la n^{e} signature est

$$T_n := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Évaluer la probabilité que les initiateurs de la pétition gagnent leur pari.

1. La pétition s'adressant aux internautes du monde entier, on peut considérer qu'il n'y a pas de ralentissement du flux de signatures pendant la nuit.

Ex 2. *Estimation du rapport signal sur bruit (6 points)*

On note $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que $\mathbf{E}(X_1^2) < +\infty$ et on note $\sigma^2 := \operatorname{Var} X_1$. On suppose de plus que l'écart-type σ est *strictement* positif. On note pour tout entier $n \geq 2$,

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i, \quad V_n := \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

On définit la suite de variables aléatoires $(R_n)_{n\geq 2}$ en posant pour tout $n \geq 2$,

$$R_n := \begin{cases} \dfrac{S_n^2}{nV_n - S_n^2} & \text{si } nV_n \neq S_n^2, \\ -1 & \text{si } nV_n = S_n^2. \end{cases}$$

On admettra que R_n est bien une variable aléatoire.

1) Montrer que presque-sûrement, le dénominateur $nV_n - S_n^2$ est strictement positif à partir d'un certain rang (aléatoire).

2) Montrer que R_n converge presque-sûrement vers une limite que l'on précisera.

3) Un signal est émis sous forme d'impulsions d'intensité $a > 0$. Pour la i^{e} impulsion émise, le récepteur capte une valeur $X_i = a + Z_i$, où Z_i représente le « bruit ». On considère les Z_i comme des v.a. indépendantes, de même loi, centrées ($\mathbf{E}Z_i = 0$), de carré intégrable et d'écart-type inconnu $\sigma > 0$. Pour évaluer la qualité de la transmission, on s'intéresse au rapport « signal sur bruit », à savoir $\frac{a}{\sigma}$. À la réception, on ne connaît ni a ni les Z_i, les seules observations sont les X_i. Proposez dans ce contexte un estimateur p.s. convergent du rapport signal sur bruit.

4) On suppose dans cette question que les X_i ont une fonction de répartition continue et on rappelle que dans ce cas, avec probabilité 1, pour *aucun* $n \geq 2$ il n'y a d'*ex-aequo* dans l'échantillon $X_1, \dots, X_n$. Montrer que presque-sûrement, pour tout $n \geq 2$, $nV_n - S_n^2$ est *strictement* positif.

Ex 3. *La méthode de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales (9 points)*

Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On se propose de donner une valeur approchée de

$$I := \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x,$$

par une méthode probabiliste appelée « méthode de Monte-Carlo ». Pour cela on utilise la simulation informatique d'une suite $(U_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$S_n := \sum_{i=1}^n h(U_i).$$

1) Expliquer pourquoi $X_1 := h(U_1)$ est intégrable, *i.e.* $\mathbf{E}|X_1| < +\infty$, et exprimer son espérance à l'aide de l'intégrale I.

2) En vous appuyant sur un théorème du cours, montrer que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I.$$

On détaillera soigneusement la vérification des hypothèses dudit théorème.

Ce résultat légitime pour n « grand » l'approximation de I par la valeur $S_n(\omega)/n$ calculée à partir de l'échantillon généré par l'ordinateur. On s'intéresse maintenant au contrôle de l'erreur d'approximation.

3) Expliquer pourquoi X_1 est de carré intégrable et exprimer sa variance σ^2 à l'aide d'intégrales de la fonction h. Est-il raisonnable dans ce contexte de supposer σ connue ?

4) En utilisant le théorème limite central, proposer un intervalle centré sur $\frac{S_n}{n}$ et contenant I avec une probabilité de 95% (cet intervalle étant de longueur minimale et en négligeant l'erreur due à l'approximation gaussienne).

5) Cet intervalle dépendant de la quantité inconnue σ, n'est pas utilisable en pratique. Expliquer comment résoudre ce problème en majorant σ si on connaît un majorant M de $\sup_{x\in[0,1]} |h(x)|$.

6) Proposer de même un intervalle de confiance avec « variance estimée » en vous appuyant sur un théorème vu en cours. Pour cela on complète en pratique le programme de calcul de S_n/n en lui faisant calculer en plus la quantité

$$W_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(U_i)^2.$$

Table des valeurs de Φ, f.d.r. de la loi normale standard $\mathfrak{N}(0,1)$

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \mathrm{d}t, \quad Z \sim \mathfrak{N}(0,1).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986