Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math306 **Année 2005-2006**

Partiel

3 novembre 2005, durée 2 heures.

Documents autorisés : chapitres 1 et 2 du polycopié de cours. Calculatrices autorisées.

Ce sujet comporte **3 pages** dont une figure. Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle. Les trois exercices sont indépendants, mais les résultats de l'exercice 1 pourront éventuellement être utilisés aux questions 4) et 5) de l'exercice 2.

Ex 1. *Un peu de sommabilité (5 points)*

On définit la famille de réels $\big(u_{i,j}\big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ par

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\quad u_{i,j} := \frac{1}{18}\left(\frac{5}{6}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^j.$$

1) Montrez que $\big(u_{i,j}\big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculez sa somme.
2) On note L le sous ensemble de $\mathbb{N}^2$ défini par

$$L := \big\{(i,j)\in\mathbb{N}^2;\ 0\leq i\leq j\big\}$$

et on s'intéresse à la famille $\big(u_{i,j}\big)_{(i,j)\in L}$.

a) Représentez graphiquement L.
b) Expliquez brièvement pourquoi $\big(u_{i,j}\big)_{(i,j)\in L}$ est sommable.
c) Calculez la somme de cette famille.

Ex 2. *Un double temps d'attente (10 points)*

On dispose d'un dé bleu et d'un dé rouge *équilibrés* et on effectue une suite infinie de lancers de cette paire de dés. Pour un lancer nous pouvons modéliser cette expérience par l'ensemble $E := \{1,2,3,4,5,6\}^2$ des couples à composantes dans $\{1,\dots,6\}$, la première composante représentant le nombre indiqué par le dé bleu et la deuxième celui indiqué par le dé rouge. Pour représenter la suite infinie de lancers, nous utiliserons l'ensemble

$$\Omega := E^{\mathbb{N}^*} = \big\{(\omega_n)_{n\geq 1};\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \omega_n = (\omega_{n,1},\omega_{n,2})\in E\big\}$$

des suites infinies de couples éléments de E. Définissons les évènements suivants.

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, A_k est l'évènement « la première obtention du chiffre 2 avec le dé bleu a lieu lors du k^{e} lancer ».
- A' est l'évènement « le dé bleu ne donne jamais le chiffre 2 ».
- Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, B_ℓ est l'évènement « la première obtention du chiffre 3 ou du chiffre 6 avec le dé rouge a lieu lors du ℓ^{e} lancer ».
- B' est l'évènement « le dé rouge ne donne jamais le chiffre 3 ni le 6 ».

Dans tout cet exercice, on n'essaiera pas d'expliciter la tribu $\mathcal{F}$ et la mesure de probabilité P telles que le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ soit une modélisation « correcte » de la suite infinie des lancers. On admettra l'existence d'un tel triplet et on se contentera de s'appuyer sur des hypothèses naturelles d'indépendance des lancers pour effectuer les calculs.

1) Expliquez pourquoi A' et B' sont des ensembles infinis non dénombrables.

2) Calculez $P(A_k)$, $P(B_\ell)$ et $P(A_k \cap B_\ell)$, pour $k, \ell \in \mathbb{N}^*$.

3) Calculez $P\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\big)$ et en déduire que $P(A') = 0$. Que vaut $P(B')$?

4) Calculez $P(A' \cup B')$, en utilisant soit la question précédente, soit l'exercice 1.

5) Il est commode d'introduire les notations $A_k = \{X = k\}$, $B_\ell = \{Y = \ell\}$. On peut interpréter les nombres aléatoires X et Y comme les temps d'attente respectifs, exprimés en nombre de lancers, de la première obtention d'un 2 avec le dé bleu et de la première obtention d'un 3 ou d'un 6 avec le dé rouge. On note C l'évènement « le dé bleu donne 2 pour la première fois au bout de X lancers, le rouge donne un 3 ou un 6 pour la première fois au bout de Y lancers *et* $X \leq Y$ ». Avec un léger abus, on pourra écrire $C = \{X \leq Y\}$. Notez que C est inclus dans A'^c et dans B'^c.

Exprimez C comme une union dénombrable d'évènements de la forme $A_k \cap B_\ell$ et calculez $P(C)$.

6) Expliquez pourquoi la famille $\{A_1, A_1^c \cap B_1, A_1^c \cap B_1^c\}$ constitue une partition de Ω et donnez *sans calcul* mais en expliquant votre choix les valeurs de $P(C \mid A_1)$, $P(C \mid A_1^c \cap B_1)$, $P(C \mid A_1^c \cap B_1^c)$. Retrouvez ainsi, sans calcul de série double, la valeur de $P(C)$.

Ex 3. *Une fête Ch'ti (6 points)*

Lors de la grande fête annuelle d'une cité du Nord, le maire lance du haut du beffroi n poupées de chiffons sur la foule massée sur les deux rives d'un canal. Compte tenu de la hauteur du beffroi, de la force et de la direction du vent (et de l'expérience des années précédentes !), on estime que le point d'atterrissage d'une poupée suit la loi uniforme Q sur le rectangle représenté figure 1.

1) En utilisant les renseignements fournis par la figure, calculez les probabilités $Q(A)$, $Q(B)$, $Q(C)$ pour une poupée lancée d'atterrir sur la zone A, la zone B ou dans le canal (zone C). Dans la suite, on posera pour alléger les notations $a = Q(A)$, $b = Q(B)$, $c = Q(C)$.

2) On s'intéresse désormais aux lancers des n poupées que l'on considère comme *indépendants* et on note $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé modélisant cette expérience. On note X, Y et Z les nombres aléatoires de poupées tombant respectivement en zone

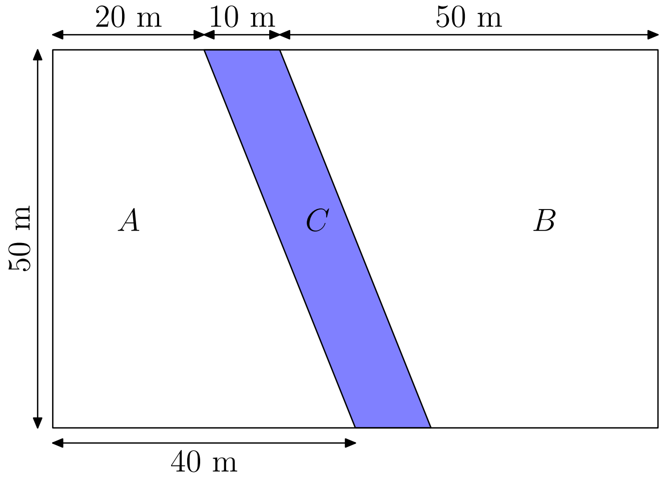

FIG. 1 – Zones d'atterrissage

A, B et C. Ces trois nombres sont liés par la relation $X + Y + Z = n$. En utilisant l'indépendance des lancers et la question précédente, justifiez la formule

$$P\big((X,Y,Z) = (i,j,k)\big) = \begin{cases} \dfrac{n!}{i!\,j!\,k!} a^i b^j c^k & \text{si } i + j + k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3) Calculez la probabilité qu'aucune poupée ne tombe dans le canal.

4) Pour $k = 1, \ldots, n$, calculez la probabilité qu'exactement k poupées tombent dans le canal.