Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2006–2007**

Partiel

16 novembre 2006, durée : 2 heures

Documents autorisés : polycopié de cours d'IPE. Calculatrices autorisées.

Ce sujet comporte **4 pages** dont 4 figures. Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle. Les trois premiers exercices sont indépendants, mais les résultats des exercices 1 et 2 peuvent être utilisés dans le problème.

Ex 1. Échauffement : entre gris clair et gris foncé *(2 points)*
Interpréter l'aire en bleue de la figure suivante comme la somme d'une série géométrique dont on donnera la valeur (graphiquement).

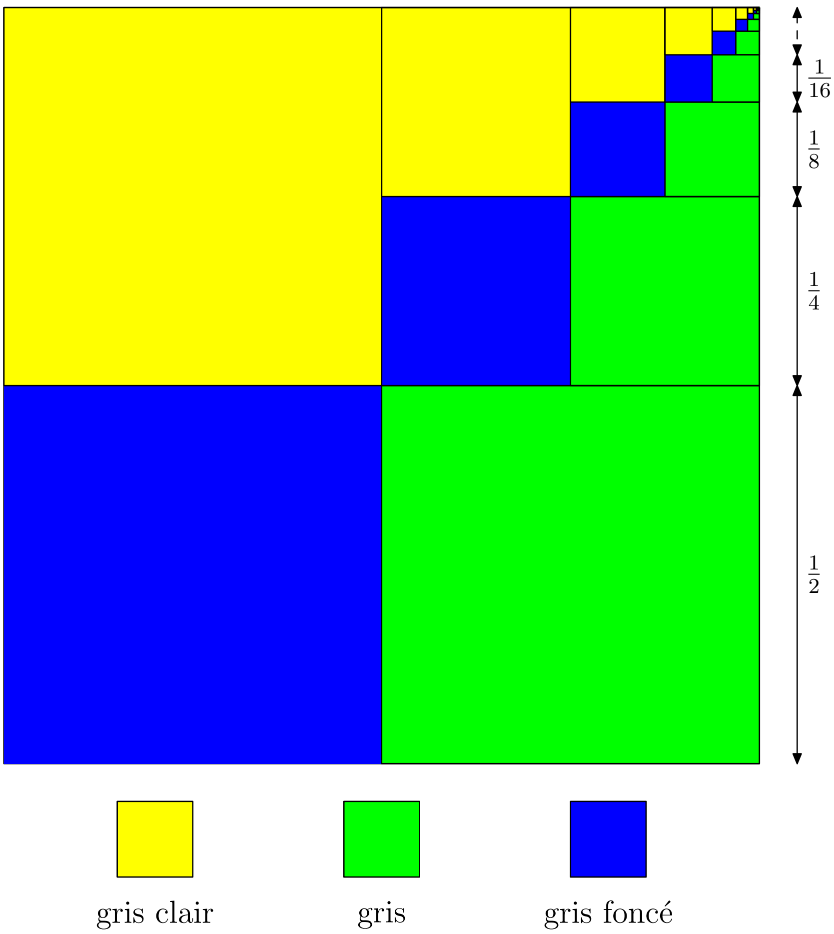

FIG. 1 – Série géométrique

Ex 2. Espérance de variable aléatoire discrète *(3 points)*
Soit X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, montrer l'égalité (valable dans $\bar{\mathbb{R}}_+$)

$$\sum_{j=0}^{+\infty} jP(X=j) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

On rappelle que la somme $\sum_{j=0}^{+\infty} jP(X=j)$ (qui peut être infinie) est l'espérance de la variable aléatoire discrète X.

Problème. Une cible pas comme les autres *(15=1+5+4+5 points)*

Les trois parties de ce problème sont indépendantes mais il est conseillé de les traiter dans l'ordre.

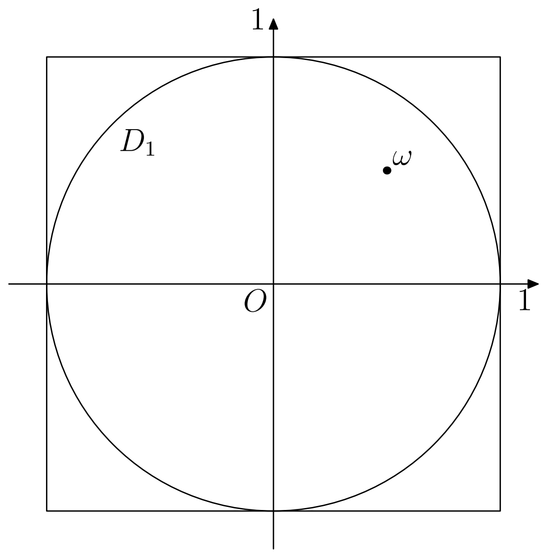

Fig. 2 – Cible

Un tireur tire une flèche sur une cible et on suppose qu'il est suffisamment expérimenté pour que la flèche atteigne la cible à coup sûr. La cible est représentée par le carré $[-1,1]^2$, le centre de la cible est noté O. Un événement élémentaire est un élément $\omega \in [-1,1]^2$ représentant le point d'impact de la flèche et on modélise cette expérience aléatoire par l'espace $\Omega = [-1,1]^2$ muni de la tribu borélienne $\mathrm{Bor}\left([-1,1]^2\right)$ (tribu engendrée par les ouverts de $[-1,1]^2$) et de la probabilité P uniforme sur $[-1,1]^2$. On note D_1 le disque ouvert de centre O et de rayon 1.

0) Quelle est la probabilité que le point d'impact de la flèche tombe dans D_1 ?

Ce tir rapportera un certain nombre de points comptabilisé différemment dans les deux parties suivantes.

Première partie *(5 points)*

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note D_i le disque ouvert de centre O et de rayon 2^{-i+1} et on définit $C_i := D_i \setminus D_{i+1}$. Le tir rapporte i points si le point d'impact est dans C_i pour un entier $i \in \mathbb{N}^*$ et il rapporte 0 point sinon (voir figure 3). On note N_1 la variable aléatoire égale au nombre de point(s) obtenu(s) grâce à ce tir.

1) La variable aléatoire N_1 est-elle discrète ?

2) Quel est l'ensemble $\underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} C_i$? Calculer $P(N_1 = 0)$.

3) Calculer $P(D_k)$ et en déduire $P(N_1 \geq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4) En déduire la loi de N_1 ainsi que son espérance $\mathbf{E}(N_1)$.

5) Sachant que le point d'impact de la flèche est tombé dans D_1, quelle est la probabilité d'obtenir exactement k points (avec $k \in \mathbb{N}^*$) ? En déduire la loi conditionnelle de N_1 sachant D_1 (on reconnaîtra une loi dont on donnera le(s) paramètre(s)).

Deuxième partie *(4 points)*

Le tir rapporte 0 point si le point d'impact de la flèche n'est pas dans D_1, il rapporte maintenant $1 - x$ points si le point d'impact est à une distance x du centre O de la cible pour $x \in [0, 1[$ (voir figure 4). On note N_2 la variable aléatoire (positive) égale au nombre de point(s) obtenu(s) grâce à ce tir. Autrement dit, pour $\omega \in \Omega$

$$N_2(\omega) = \begin{cases} 1 - ||\omega|| & \text{si } \omega \in D_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6) Calculer $P(N_2 \leq 0)$ et $P(N_2 > \frac{1}{2})$.

7) Calculer la fonction de répartition F de N_2 et la tracer.

8) La loi de N_2 est-elle discrète, à densité ?

9) Calculer son espérance $\mathbf{E}(N_2)$ et la représenter sur le graphe de F.

Troisième partie *(5 points)*

Le tireur est devenu fou et il tire des flèches sans s'arrêter. On suppose que les tirs sont indépendants les uns des autres. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note A_i l'événement « l'impact de la flèche du i^{e} lancer est dans D_1 ».

10) Soit $n \geq 1$, exprimer l'événement $B_n =$ « au moins une des n premières flèches tombe dans D_1 » en fonction des événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. Calculer sa probabilité.

11) Quelle est la probabilité de l'événement $B =$ « au moins une flèche tombe dans D_1 » ? Indication : on pourra exprimer B en fonction des événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

12) Soit $n \geq 1$, exprimer l'événement $E_n =$ « toutes les flèches tombent dans D_1 à partir du n^{e} lancer » en fonction des événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. Calculer sa probabilité.

13) En déduire la probabilité de l'événement $E =$ « toutes les flèches tombent dans D_1 à partir d'un certain lancer » . Exprimer l'événement contraire de E en fonction des événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et le décrire en une phrase.

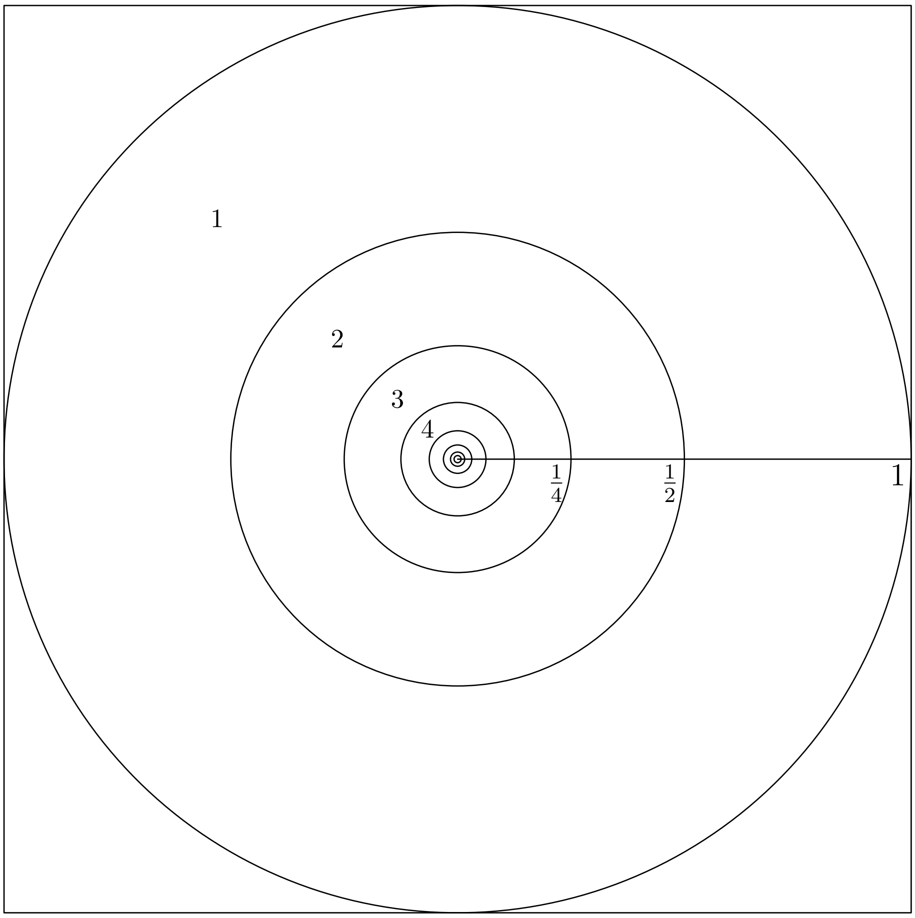

FIG. 3 – Cible de la première partie

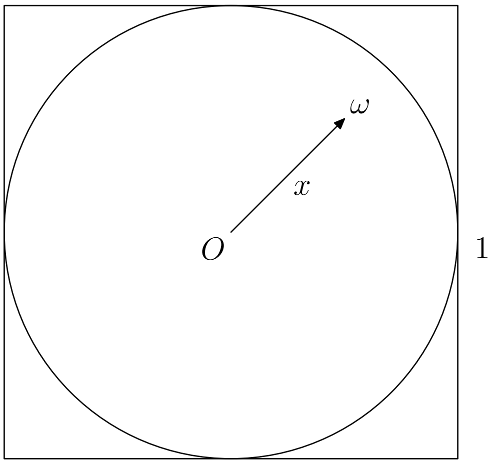

FIG. 4 – Cible de la deuxième partie