Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2009–2010**

Corrigé du devoir surveillé du 19 novembre 2009

Ex 1. Vrai faux ? *(4 points)*
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquez si vous la pensez vraie ou fausse en argumentant votre réponse. Si vous répondez « vrai », proposez une démonstration ou une référence à un résultat du cours. Si vous répondez « faux », il suffit de proposer un contre exemple. Seules les réponses argumentées seront prises en compte par les correcteurs.

1) *S'il existe une surjection d'un ensemble E dans $\mathbb{N}$ alors E est dénombrable.*
Faux. Contre-exemple : $E = \mathbb{R}$ et l'application de ϕ de E dans $\mathbb{N}$ définie par $\phi(x) = |[x]|$ (où $[x]$ désigne la partie entière du réel x) est clairement surjective et pourtant E est infini non dénombrable.

2) *S'il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans un ensemble E alors E est au plus dénombrable.*
Faux. Contre-exemple : $E = \mathbb{R}$ et l'application ϕ de $\mathbb{N}$ dans E définie par $\phi(x) = x$ est clairement injective et pourtant E est infini non dénombrable. Remarque : l'existence d'une injection de $\mathbb{N}$ dans un ensemble E permet juste d'affirmer que E est infini.

3) *Une intersection quelconque d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.*
Vrai. Preuve : soit I un ensemble quelconque d'indices et pour $i \in I$, A_i un ensemble au plus dénombrable, on pose alors $A = \cap_{i\in I} A_i$. Si $I = \emptyset$ alors par convention $A = \emptyset$ est au plus dénombrable (il est fini), sinon il existe $i_0 \in I$ et $A \subset A_{i_0}$ et donc A est au plus dénombrable (comme sous-ensemble d'un ensemble au plus dénombrable).

4) *Si P est la probabilité uniforme sur $[0, 1]$ alors $P(\mathbb{Q}) = 0$.*
Vrai. Preuve : L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable et donc,

$$P(\mathbb{Q}) = \sum_{x\in\mathbb{Q}} P(\{x\}).$$

Or la probabilité P uniforme sur $[0, 1]$ est une mesure continue (ou diffuse) sur $\mathbb{R}$ donc $P(\{x\}) = 0$ pour tout réel x et on conclut que $P(\mathbb{Q}) = 0$.

Commentaires :
- Il y a plein d'autres contre-exemples à donner. Dire qu'une proposition est fausse en donnant une définition ou une autre proposition juste ne démontre rien.
- Lorsqu'on définit une application, il faut donner l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée (cela fait partie entièrement de la définition de l'application).

Ex 2. Fonction de répartition *(4 points)*
Tracer le graphe des fonctions suivantes. Pour chacune de ces fonctions, préciser s'il s'agit de la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Si oui,

- *calculer l'espérance correspondante (si elle existe),*
- *déterminer si la variable aléatoire est à densité ou non. Dans l'affirmative, calculer la densité associée.*

1) $F_1(x) = 0$ *si* $x \leq 0$ *et* $F_1(x) = 1 - \exp(-x)$ *si* $x > 0$,

2) $F_2(x) = 0$ *si* $x < 0$ *et* $F_2(x) = 1 - \frac{1}{2}\exp(-x)$ *si* $x \geq 0$,

3) $F_3(x) = 0$ *si* $x \leq 1$ *et* $F_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^{-a}$ *si* $x > 1$ *(avec* $a > 0$*).*

Les fonctions F_1 et F_2 sont des fonctions de répartition car elles sont continues à droite, limitées à gauche, croissantes sur $\mathbb{R}$, de limites nulle en $-\infty$ et égale à 1 en $+\infty$. Par contre F_3 n'est pas continue à droite au point 1 car

$$\lim_{x\to 1^+} F_3(x) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad F_3(1) = 0,$$

donc F_3 n'est pas une fonction de répartition.

La fonction F_1 est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux (elle est C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, elle n'est pas dérivable en 0). Donc, F_1 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X_1 à densité et la densité de X_1 est la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$.

La fonction F_2 n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car $F_2(0) = \frac{1}{2}$ alors que $F_2(0-) = 0$, donc ce n'est pas la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

D'autre part,

$$P(X_1 \geq 0) = 1 - F_1(0^-) = 1,$$

et donc X_1 est presque surement positive. Ainsi,

$$\mathbf{E}(X_1) = \int_0^{+\infty} (1 - F_1(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

On pouvait remarquer que X_1 suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Si X_2 est une variable aléatoire de fonction de répartition F_2 alors

$$P(X_2 \geq 0) = 1 - F_2(0^-) = 1,$$

et donc X_2 est presque surement positive. Ainsi,

$$\mathbf{E}(X_2) = \int_0^{+\infty} (1 - F_2(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Commentaires :

- La fonction F_2 est C^1 par morceaux mais cela ne permet pas de conclure que la loi est à densité. On peut d'ailleurs remarquer que
$$P(X_2 = 0) = F_2(0) - F_2(0^-) = \frac{1}{2}$$
ce qui est un autre argument pour montrer que X_2 n'est pas à densité.
- Par contre, la seule continuité de la fonction de répartition ne permet pas de conclure à l'existence d'une densité.
- Si on avait défini
$F_4(x) = 0$ si $x < 1$ et $F_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^{-a}$ si $x \geq 1$ (avec $a > 0$).
Alors, cela aurait été la fonction de répartition d'une variable aléatoire X_4 presque surement positive, qui n'est pas à densité et dont l'intégrabilité dépend du paramètre a.

Ex 3. Une suite infinie de tirages *(7 points)*
Une urne contient b boules blanches et v boules vertes (où b et v sont des entiers non nuls). On effectue une suite infinie de tirages avec remise d'une boule dans cette urne. L'espace des événements élémentaires est l'ensemble des suites à valeurs dans $\{B, V\}$: $\Omega = \{B, V\}^{\mathbb{N}^*}$. Ainsi un événement élémentaire est décrit par $\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ où ω_i est le résultat du i-ème tirage (B pour une boule blanche et V pour une boule verte). On munit Ω d'une tribu $\mathcal{F}$ qui contient les événements suivants : pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- V_n = *« on tire une boule verte au n-ième tirage »*
- A_n = *« la première boule blanche est obtenue au n-ième tirage »*
- C_n = *« les n premiers tirages n'amènent que des boules vertes »*
- C = *« on n'obtient que des boules vertes ».*

1) *L'ensemble Ω est-il dénombrable ?*

L'ensemble Ω est en bijection avec $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ qui est un ensemble infini non dénombrable. Et donc Ω est un ensemble infini non dénombrable.

2) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

a) *Exprimer A_n en fonction des événements $(V_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ puis en fonction de C_{n-1} et V_n.*
Pour $n = 1$, $A_1 = V_1^c$ et pour $n \geq 2$

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} V_i \cap V_n^c \quad \text{et} \quad A_n = C_{n-1} \cap V_n^c.$$

b) *Exprimer C en fonction des événements $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} C_n.$$

c) *Quel est le lien entre les événements C et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?*

$$C \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big) = \Omega \quad \text{ou bien} \quad C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^c.$$

Dans la suite de l'exercice, la probabilité des événements considérés pourra être calculée en utilisant des propriétés d'indépendance et de conditionnement.

3) *On admet la construction d'une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ correspondant à l'expérience décrite.*

a) *Calculer $P(A_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.*
Comme les événements $(V_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants de même probabilité $p = \frac{v}{b+v}$, on en déduit que

$$P(A_n) = \prod_{i=1}^{n-1} P(V_i).P(V_n^c) = p^{n-1}(1-p),$$

la formule étant valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

b) *Calculer $P(C)$.*
Comme C est l'intersection d'une suite décroissante d'événements $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la propriété de continuité séquentielle monotone d'une probabilité permet de conclure que

$$P(C) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = \lim_{n\to\mathbb{N}^*} p^n = 0,$$

car $0 < p < 1$ puisque b et v sont non nuls.

4) *On modifie les tirages de la manière suivante : à chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne avec en plus une boule de même couleur. On note Q la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ correspondant à cette expérience.*

a) *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $p_n = Q(C_n)$ et $q_n = Q(A_n)$ (en donner une expression sous forme d'un produit).*
On utilise la règle des conditionnement successifs :

$$p_n = Q(C_n) = Q(C_1)Q(C_2|C_1)Q(C_3|C_1 \cap C_2) \times \cdots \times Q(C_n|C_1 \cap \cdots \cap C_{n-1}).$$

Or l'événement $C_1 \cap \cdots \cap C_i = C_i$ pour $1 \le i \le n-1$ implique qu'à chaque tirage, on ajoute une boule verte et donc l'urne contient alors $v + i$ boules vertes (sur un total de $v + b + i$ boules). Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{v+i}{b+v+i}.$$

On en déduit facilement $q_n = Q(A_n)$ pour $n \ge 2$ en utilisant

$$q_n = Q(C_{n-1} \cap V_n^c) = Q(V_n^c|C_{n-1})Q(C_{n-1}) = p_{n-1}\frac{b}{b+v+n-1}.$$

Et $q_1 = \frac{b}{b+v}$.

b) *Montrer que la suite $(\ln(p_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$. En déduire la valeur de $Q(C)$.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(p_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \ln\left(\frac{v+i}{b+v+i}\right).$$

C'est donc la somme partielle de la série de terme général $\ln\left(\frac{v+i}{b+v+i}\right)$, $i \in \mathbb{N}$, qui est de signe constant (négatif). Or, on a un équivalent quand $i \to +\infty$:

$$\ln\left(\frac{v+i}{b+v+i}\right) = \ln\left(1 - \frac{b}{b+v+i}\right) \sim -\frac{b}{b+v+i},$$

qui est le terme général d'une série divergente. Donc, $\lim_{n\to+\infty} \ln(p_n) = -\infty$. D'où $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$. Donc, $Q(C) = 0$ car $Q(C) = \lim_{n\to+\infty} Q(C_n) = \lim_{n\to+\infty} p_n$ par continuité séquentielle monotone.

c) *Montrer alors que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} q_n = 1$.*
Comme les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des événements disjoints,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} q_n = Q(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n) = Q(C^c) = 1 - Q(C) = 1,$$

car $Q(C) = 0$.

Commentaires :

– Personne n'a su trouver la limite de la suite $(\ln(p_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. C'est bien dommage. Pour certains, le produit de n termes compris strictement entre 0 et 1 tend vers 0 ce qui n'est pas toujours le cas (trouver des contre-exemples).

- Penser à la propriété de continuité séquentielle monotone pour des passage à la limite de probabilité d'événements.
- Il est interdit d'écrire : comme les $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants (ce qui déjà est faux : ils forment une suite décroissante d'événements), $P(C) = \prod_{n=1}^{+\infty} P(C_n)$, (comment définissez-vous le produit infini ?) car la propriété d'indépendance permet de dire que la probabilité d'une intersection *finie* d'événements (indépendants) est le produit *fini* des probabilités de ces événements.
- Un événement n'est pas une variable aléatoire (en particulier il ne suit aucune loi).

Ex 4. Temps d'attente de Pierre et Emmanuel *(5 points)*
Pierre et Emmanuel ont rendez-vous entre 12h et 12h30. On modélise cette situation par l'espace des événements élémentaires $\Omega = [0,30]^2$, le tirage $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ représentant la situation où Pierre arrive ω_1 minutes après 12h et où Emmanuel arrive ω_2 minutes après 12h[1]*. On munit Ω de la tribu borélienne $\mathrm{Bor}([0,30]^2)$ (c'est-à-dire la tribu engendrée par les ensembles ouverts de $[0,30]^2$). On admettra que tout domaine de $[0,30]^2$ dont la frontière est un polygone convexe est un élément de $\mathrm{Bor}([0,30]^2)$. On définit alors la probabilité uniforme P sur $[0,30]^2$ par*

$$P(B) = \frac{\lambda_2(B)}{\lambda_2([0,30]^2)} \quad , \quad \forall B \in \mathrm{Bor}([0,30]^2),$$

où λ_2 est la restriction de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ à $\mathrm{Bor}([0,30]^2)$ (on rappelle que λ_2 généralise la notion d'aire).

1) *Décrire les événements suivants comme sous-ensembles de Ω, les dessiner*[2] *et calculer leur probabilité :*

- $A =$ « *Pierre et Emmanuel arrivent en même temps* »

$$A = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \quad : \quad \omega_1 = \omega_2\},$$

  et $P(A) = 0$ (car une droite de $\mathbb{R}^2$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue λ_2).
- $B =$ « *Pierre attend plus de 5 minutes* »

$$B = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \quad : \quad \omega_1 + 5 \le \omega_2\},$$

  et $P(B) = \frac{25}{72}$ (c'est le calcul d'aire d'un triangle).
- $C =$ « *L'un des deux attend entre 5 et 15 minutes* ». On pose

$$C_1 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \quad : \quad \omega_1 + 5 \le \omega_2 \le \omega_1 + 15\},$$

  et

$$C_2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \quad : \quad \omega_2 + 5 \le \omega_1 \le \omega_2 + 15\}.$$

  Ainsi $C = C_1 \cup C_2$ et $P(C) = \frac{4}{9}$.

---

1. Attention : ω_1 et ω_2 ne sont pas nécessairement entiers, on considère le temps « continu » et ω_1 et ω_2 sont des réels de $[0,30]$
2. je vous laisse le soin de faire de beaux dessins

2) *Sachant que Pierre est arrivé avant 12h15, quelle est la probabilité qu'Emmanuel arrive après Pierre ?*
On note $D =$« Pierre est arrivé avant 12h15 » et $E =$ « Emmanuel arrive après Pierre ». On s'intéresse à $P(E|D)$. Comme D est de probabilité non nulle :

$$P(E|D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{3}{4}.$$