Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2009–2010**

Devoir surveillé
19 novembre 2009, durée : 2 heures

- Ce sujet comporte **2 pages** et quatre exercices indépendants.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle. Le sujet étant long, le barème est sur 23 points.
- Documents autorisés : polycopié du cours d'IPE, dictionnaire bilingue pour étudiants étrangers.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. Vrai faux ? *(4 points)*
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquez si vous la pensez vraie ou fausse en argumentant votre réponse. Si vous répondez « vrai », proposez une démonstration ou une référence à un résultat du cours. Si vous répondez « faux », il suffit de proposer un contre exemple. Seules les réponses argumentées seront prises en compte par les correcteurs.

1) S'il existe une surjection d'un ensemble E dans $\mathbb{N}$ alors E est dénombrable.

2) S'il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans un ensemble E alors E est au plus dénombrable.

3) Une intersection quelconque d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

4) Si P est la probabilité uniforme sur $[0, 1]$ alors $P(\mathbb{Q}) = 0$.

Ex 2. Fonction de répartition *(4 points)*
Tracer le graphe des fonctions suivantes. Pour chacune de ces fonctions, préciser s'il s'agit de la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Si oui,
- calculer l'espérance correspondante (si elle existe),
- déterminer si la variable aléatoire est à densité ou non. Dans l'affirmative, calculer la densité associée.

1) $F_1(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F_1(x) = 1 - \exp(-x)$ si $x > 0$,

2) $F_2(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_2(x) = 1 - \frac{1}{2}\exp(-x)$ si $x \geq 0$,

3) $F_3(x) = 0$ si $x \leq 1$ et $F_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^{-a}$ si $x > 1$ (avec $a > 0$).

Ex 3. Une suite infinie de tirages *(7 points)*
Une urne contient b boules blanches et v boules vertes (où b et v sont des entiers non nuls). On effectue une suite infinie de tirages avec remise d'une boule dans cette urne. L'espace des événements élémentaires est l'ensemble des suites à valeurs dans $\{B, V\}$: $\Omega = \{B, V\}^{\mathbb{N}^*}$. Ainsi un événement élémentaire est décrit par $\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ où ω_i est le résultat du i-ème tirage (B pour une boule blanche et V pour une boule verte). On munit Ω d'une tribu $\mathcal{F}$ qui contient les événements suivants : pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- $V_n =$ « on tire une boule verte au n-ième tirage »
- $A_n =$ « la première boule blanche est obtenue au n-ième tirage »
- $C_n =$ « les n premiers tirages n'amènent que des boules vertes »
- $C =$ « on n'obtient que des boules vertes ».

1) L'ensemble Ω est-il dénombrable ?

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Exprimer A_n en fonction des événements $(V_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ puis en fonction de C_{n-1} et V_n.

b) Exprimer C en fonction des événements $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Quel est le lien entre les événements C et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Dans la suite de l'exercice, la probabilité des événements considérés pourra être calculée en utilisant des propriétés d'indépendance et de conditionnement.

3) On admet la construction d'une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ correspondant à l'expérience décrite.

a) Calculer $P(A_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculer $P(C)$.

4) On modifie les tirages de la manière suivante : à chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne avec en plus une boule de même couleur. On note Q la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ correspondant à cette expérience.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $p_n = Q(C_n)$ et $q_n = Q(A_n)$ (en donner une expression sous forme d'un produit).

b) Montrer que la suite $(\ln(p_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$. En déduire la valeur de $Q(C)$.

c) Montrer alors que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} q_n = 1$.

Ex 4. Temps d'attente de Pierre et Emmanuel *(5 points)*

Pierre et Emmanuel ont rendez-vous entre 12h et 12h30. On modélise cette situation par l'espace des événements élémentaires $\Omega = [0, 30]^2$, le tirage $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ représentant la situation où Pierre arrive ω_1 minutes après 12h et où Emmanuel arrive ω_2 minutes après 12h [1]. On munit Ω de la tribu borélienne $\mathrm{Bor}([0, 30]^2)$ (c'est-à-dire la tribu engendrée par les ensembles ouverts de $[0, 30]^2$). On admettra que tout domaine de $[0, 30]^2$ dont la frontière est un polygone convexe est un élément de $\mathrm{Bor}([0, 30]^2)$. On définit alors la probabilité uniforme P sur $[0, 30]^2$ par

$$P(B) = \frac{\lambda_2(B)}{\lambda_2([0, 30]^2)} \quad , \quad \forall B \in \mathrm{Bor}([0, 30]^2),$$

où λ_2 est la restriction de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ à $\mathrm{Bor}([0, 30]^2)$ (on rappelle que λ_2 généralise la notion d'aire).

1) Décrire les événements suivants comme sous-ensembles de Ω, les dessiner et calculer leur probabilité :

- $A =$ « Pierre et Emmanuel arrivent en même temps »
- $B =$ « Pierre attend plus de 5 minutes »
- $C =$ « L'un des deux attend entre 5 et 15 minutes ».

2) Sachant que Pierre est arrivé avant 12h15, quelle est la probabilité qu'Emmanuel arrive après Pierre ?

1. Attention : ω_1 et ω_2 ne sont pas nécessairement entiers, on considère le temps « continu » et ω_1 et ω_2 sont des réels de $[0, 30]$