Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2008–2009**

Devoir surveillé

13 novembre 2008, durée : 2 heures

- Ce sujet comporte **4 pages** et trois exercices indépendants.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle. Le sujet étant long, le barème est sur 23 points.
- Documents autorisés : polycopié du cours d'IPE, dictionnaire bilingue pour étudiants étrangers.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. Fonction de répartition *(6 points)*
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont le graphe est donné par

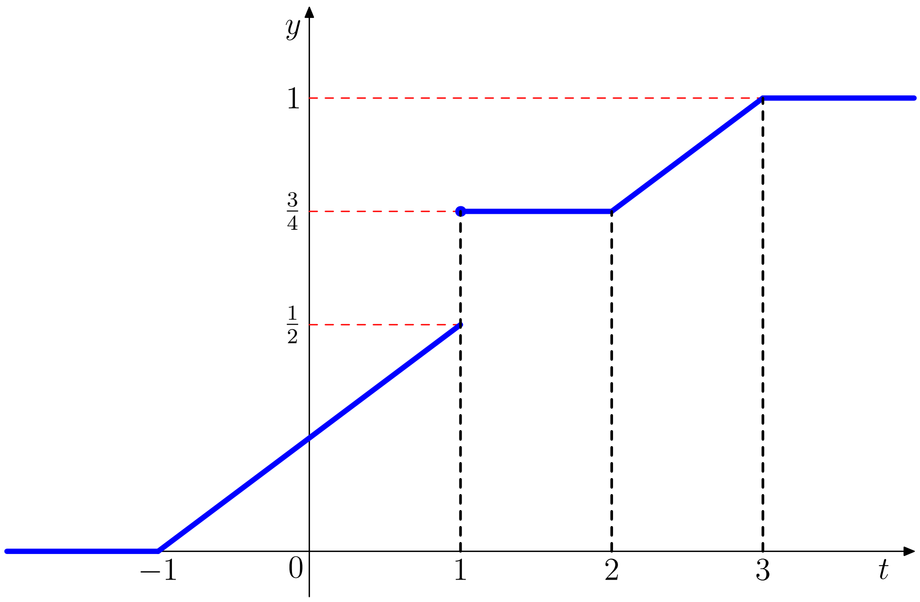

Fig. 1 – Graphe $y = F(t)$

1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité.
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.

2) En exploitant les informations fournies par ce graphique, donner les valeurs des probabilités suivantes.

$$P(X \leq -1),\qquad P(X = 0),\qquad P(X = 1),$$
$$P(X \geq 1),\qquad P(X \in [-1;3]),\qquad P(X \in [1;2[).$$

3) La loi de la variable aléatoire X peut-elle être discrète, à densité (si oui, on donnera une densité) ?

4) Donner la valeur de $P(X \in [a,b[)$ pour tout $(a,b) \in ([-1;1[\cup[2,3])^2$ tels que $a < b$. Que reconnaissez-vous ? La formule précédente est-elle valable pour tout réels a et b tels que $-1 \leq a < b \leq 3$?

5) On pose $Z = [X]$ où $[x]$ désigne la partie entière d'un réel x (on rappelle que $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \;\; n \leq x\}$). Quelle est la loi de Z ?

Ex 2. Galette des rois *(4 points)*
Je fais une galette des rois de 30 cm de diamètre et c'est mon fils qui y place une fève ronde de 2 cm de diamètre (en forme de couronne) au hasard sur la galette (il n'a pas encore bien compris qu'il vaut mieux la mettre au bord !). Je coupe la galette en 4 parts égales (en partant du centre de la galette). Quelle est la probabilité que le couteau touche la fève ?
Indication : On pourra modéliser la galette par un disque de centre O et de rayon 15 cm et supposer que le centre de la fève suit une loi uniforme sur le disque de centre O et de rayon 14 cm. Et on n'hésitera pas à faire des dessins !

Ex 3. Jeu de dés *(13 points)* [1]
On effectue une suite infinie de lancers indépendants de deux dés bien équilibrés. On note $\Omega_1 = \{1,\dots,6\}^2$ et $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace de probabilité [2] correspondant à l'expérience aléatoire avec $\Omega = \Omega_1^{\mathbb{N}^*}$. On s'intéresse au premier instant où l'on obtient deux doubles de suite.

On note les événements (indépendants) pour $n \in \mathbb{N}^*$,

D_n : « on obtient un double au n-ième lancer » .

1) Calculer $p = P(D_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Première partie

Pour $n \geq 1$, on note l'événement :

A_n : « on n'obtient *pas* deux doubles de suite au cours des n premiers lancers » , et on pose $a_n = P(A_n)$. Remarquons que $A_1 = \Omega$ et $a_1 = 1$.

2) Mise en route : calcul des premiers termes.

a) Calculer a_2.

b) Calculer a_3 en conditionnant par rapport à D_3 et à D_3^c.

3) Relation de récurrence : le but de cette question est d'établir une relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en exprimant $P(A_{n+2})$ en fonction de $P(A_{n+1})$ et de $P(A_n)$ pour tout $n \geq 1$ (en conditionnant par rapport au $(n+2)$-ième lancer). Soit $n \geq 1$,

a) Montrer que

$$P(A_{n+2} \cap D_{n+2}) = P(A_{n+2} | D_{n+1}^c \cap D_{n+2}) P(D_{n+1}^c \cap D_{n+2}).$$

b) Donner sans calculs les valeurs de $P(A_{n+2} | D_{n+1}^c \cap D_{n+2})$ et de $P(A_{n+2} | D_{n+2}^c)$.

1. Cet exercice comporte deux parties, la deuxième partie peut-être traitée en utilisant le résultat de la question 4

2. On ne demande pas de décrire la tribu $\mathcal{F}$ et tous les événements considérés sont supposés appartenir à $\mathcal{F}$.

c) En déduire la relation de récurrence :

$$a_{n+2} = \frac{5}{6}a_{n+1} + \frac{5}{36}a_n. \tag{1}$$

4) Résolution du problème : cette question est consacrée à l'obtention d'une expression directe de a_n pour $n \geq 1$.
Pour cela, on introduit $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant la relation de récurrence (1) :

$$\mathcal{U} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad : \quad u_{n+2} = \frac{5}{6}u_{n+1} + \frac{5}{36}u_n \right\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

b) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{U}$ telle que $u_1 = a$ et $u_2 = b$. On notera cette suite $u(a, b)$. En déduire la dimension de $\mathcal{U}$ en montrant que l'appplication :

$$\phi \quad : \quad \begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathcal{U} \\ (a, b) &\mapsto u(a, b). \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

c) On note λ_1 et λ_2 les deux racines distinctes de

$$\lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda - \frac{5}{36} = 0.$$

Et on définit les deux suites $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$v_n = \lambda_1^{n-1} \quad , \quad w_n = \lambda_2^{n-1},$$

pour tout $n \geq 1$.
Montrer que (v, w) forment une base du sous-espace vectoriel $\mathcal{U}$.

d) Déduire des questions précédentes l'expression de a_n pour tout $n \geq 1$.
Indication : On déterminera les coefficients α et β tels que

$$\text{pour tout} \quad n \geq 1 \quad , \quad a_n = \alpha v_n + \beta w_n.$$

5) Une conséquence.
On note A l'événement « on n'obtient jamais deux doubles de suite ».

a) L'ensemble A est-il au plus dénombrable ?
Indication : On pourra étudier au préalable la dénombrabilité de l'événement :
B : « on n'obtient jamais de doubles ».

b) Exprimer A en fonction des événements $(A_n)_{n\geq 2}$ et en déduire la valeur de $P(A)$.

Deuxième partie

On définit la variable aléatoire N égale aux nombres de lancers avant l'apparition des deux premiers doubles consécutifs. Autrement dit $\{N = n\}$ est l'événement « les deux premiers doubles consécutifs apparaissent aux $n + 1$-ième et $n + 2$-ième lancers.

6) Calculer $P(N = 0)$.

7) Exprimer les événements A_{n+1} à l'aide de la variable aléatoire N et en déduire l'expression des événements $\{N = n\}$ en fonction des événements A_{n+1} et A_{n+2} pour $n \geq 0$.

8) En déduire la loi de la variable aléatoire N. On pourra se contenter de donner l'expression de $P(N = n)$ pour $n \geq 1$ en fonction de α, β, λ_1 et λ_2.

9) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) = 1$.

10) Calculer $\mathbf{E}(N) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nP(N = n)$.