Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2007–2008**

Devoir surveillé, 12 janvier 2008, durée 2 heures

- Ce sujet comporte **2 pages**.
- Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.
- Documents autorisés : polycopié du cours d'IPE, dictionnaire bilingue pour étudiants étrangers.
- Calculatrices autorisées.

Ex 1. *Une variable aléatoire tronquée (4 points)*

Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, X est une variable aléatoire de loi exponentielle. Soient a et b deux réels fixés $0 < a < b$. On définit sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la variable aléatoire Y par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leq a, \\ X(\omega) & \text{si } a < X(\omega) \leq b, \\ b & \text{si } X(\omega) > b. \end{cases}$$

1) Dessinez l'allure de la représentation graphique de la fonction de répartition de Y en justifiant brièvement votre dessin.

2) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Si oui, calculez cette densité.

Ex 2. *Contrôleur contre fraudeur (10 points)*

Une compagnie de métro pratique les tarifs suivants. Le ticket donnant droit à un trajet coûte 1 € ; les amendes sont fixées à 20 € pour la première infraction constatée, 40 € pour la deuxième et 400 € pour la troisième. La probabilité p pour un voyageur d'être contrôlé au cours d'un trajet est supposée constante et connue de la seule compagnie ($0 < p < 1$). Un fraudeur décide de prendre systématiquement le métro sans payer jusqu'à la deuxième amende et d'arrêter alors de frauder. On note T le nombre de trajets effectués jusqu'à la deuxième amende (T est le numéro du trajet où le fraudeur est contrôlé pour la deuxième fois). On note $q = 1 - p$ la probabilité de faire un trajet sans contrôle.

1) Montrer que la loi de T est donnée par

$$P(T = k) = (k-1)p^2 q^{k-2}, \quad k \geq 2.$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(T > n)$. *Indication* : on pourra commencer par chercher une formule explicite pour la somme de la série entière

$$f(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^{k-1},$$

puis pour sa dérivée terme à terme.

3) Calculer numériquement $P(T > 60)$ (pourquoi s'intéresse-t-on à cette quantité ?) lorsque $p = 1/10$ et lorsque $p = 1/20$.

4) Calculez en fonction de p la quantité

$$\mathrm{E}\,T := \sum_{k=2}^{+\infty} kP(T = k).$$

Cette quantité est l'espérance de T et peut s'interpréter comme la valeur moyenne du temps d'attente.

5) D'un point de vue purement financier (et donc hors de toute considération de moralité), quel conseil donneriez-vous au fraudeur ? N.B. ceci est une question ouverte et il y a plusieurs réponses valables possibles.

Ex 3. *Un peu de trigonométrie aléatoire (6 points)*

On définit une variable aléatoire X grâce à la construction représentée à la figure 1. L'angle $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}\right)$ a pour mesure en radians U, *variable aléatoire* de loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. La distance AO vaut 1 et X est l'abscisse du point M sur la droite de repère $(O, \vec{i}\,)$: $\overrightarrow{OM} = X\vec{i}$. Les angles sont orientés dans le sens trigonométrique, la figure est faite pour U positif. Pour $U = 0$, M coïncide avec le point O et pour $-\pi/2 < U < 0$, M est « à gauche » de O.

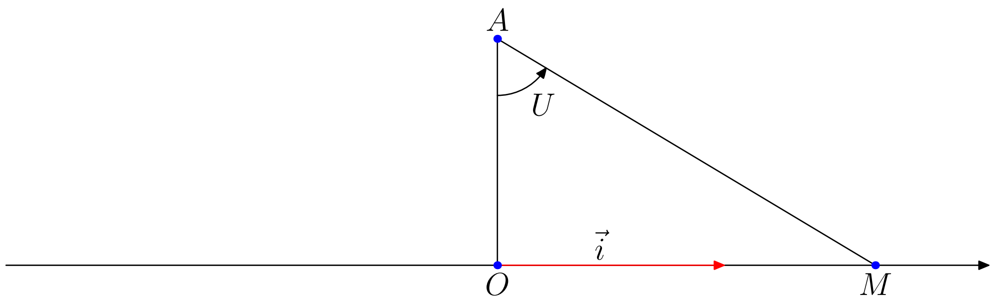

FIG. 1 – Construction de M

1) Exprimez X en fonction de U.

2) Pour x réel, calculez $P(X \le x)$. On obtient ainsi la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X.

3) Expliquez pourquoi la loi de X est à densité et calculez cette densité. Que reconnaissez vous ainsi ?

4) Quelle est la valeur de $P(|X| \le 1)$? Cette question peut se résoudre avec ou sans l'aide des précédentes.