Corrigé DM2

IPE Math 306

15 décembre 2009

Exercice n°1

Notons (X, Y) les coordonnées du centre de la fève. En considérant que la galette est un disque centré en 0 et de rayon 15, le vecteur aléatoire (X, Y) est à valeurs dans D le disque centré en 0 et de rayon 14 et suit une loi uniforme sur D. On peut considérer quitte à faire un changement de repère que la galette va être coupé en quatre parts égales selon les axes (voir dessin ci -dessous).

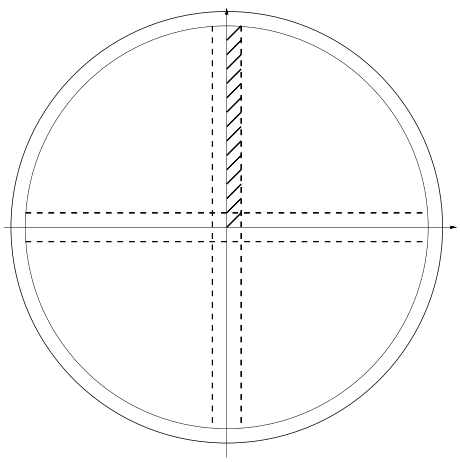

Fig. 1: Lorsque le centre de la fève rencontre la zone délimitée par des pointillets, cela correspond au couteau qui rencontre la fève. Le calcul de l'aire de la zone hachurée notée H est important pour répondre au problème.

Notons A la zone délimitée par des pointillets ; la probabilité de tomber sur la fève est donc $\mathbb{P}((X, Y) \in A)$. Puisque (X, Y) suit une loi uniforme sur D on a

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(D)} = \frac{\lambda(A)}{14^2\pi},$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Reste à calculer $\lambda(A)$: pour cela on note H la zone hachurée et C le carré plein $[-1,1]^2$; on consate que

$$\lambda(A) = 8\lambda(H) - \lambda(C) = 8\int_0^1 \sqrt{14^2 - x^2}dx - 4.$$

De plus, on a en posant $x = 14\sin\theta$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{14^2 - x^2}dx &= 14^2 \int_0^{\arcsin(1/14)} \cos^2\theta d\theta \\
&= 14^2 \int_0^{\arcsin(1/14)} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= 14^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\arcsin(1/14)} \\
&= 14^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{\arcsin(1/14)} \\
&= \frac{14^2}{2}\left[\arcsin(1/14) + \frac{1}{14}\sqrt{1 - \frac{1}{14^2}}\right],
\end{aligned}$$

D'où

$$\lambda(A) = 4.14^2 \left[\arcsin(1/14) + \frac{1}{14}\sqrt{1 - \frac{1}{14^2}}\right] - 4,$$

et

$$\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \frac{4}{\pi}\left[\arcsin(1/14) + \frac{1}{14}\sqrt{1 - \frac{1}{14^2}} - \frac{1}{14^2}\right] \simeq 0,1752405.$$

Exercice n°2

1. Posons pour tout $u \in [0,1]$

$$f(u) = \mathrm{e}^{-u} + u - 1.$$

   On a $f'(u) = -\mathrm{e}^{-u} + 1$ et on constate que $f' \geq 0$ sur $[0,1]$ (en fait sur tout $\mathbb{R}^+$) ; on en déduit que f est croissante sur $[0,1]$ et comme $f(0) = 0$, il en résulte que $f \geq 0$ sur $[0,1]$.
2. On applique l'inégalité de la question 1 à $u = \mathbb{P}(A_i)$, il vient

$$\exp\left[-\mathbb{P}(A_i)\right] \geq \mathbb{P}(A_i^c);$$

   puis en faisant le produit sur i des ces inégalités et tenant compte de l'indépendance des A_i^c, on obtient

$$\exp\left[-\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\right] \geq \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^c) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right).$$

   C'est le résultat.

3. (a) La suite $(\cup_{k\geq n} A_k)_n$ est décroissante (au sens de l'inclusion) et d'après la propriété de continuité séquentielle de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \downarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) ;$$

par ailleurs, on a pour tout n

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k) ;$$

donc si $\sum_k \mathbb{P}(A_k)$ converge alors $\sum_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ d'où $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 0$.

   (b) Supposons $\sum_k \mathbb{P}(A_k) = \infty$. Il s'agit de montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 1.$$

Toujours à cause de la continuité séquentielle de $\mathbb{P}$, il suffit de prouver que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 1. \tag{1}$$

Pour cela, on applique le résultat de la question 2 aux A_k pour k compris entre n et N ; il vient

$$1 - \exp\left[-\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)\right] \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) ;$$

et en faisant $N \to \infty$, on obtient compte tenu de l'hypothèse,

$$1 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) ;$$

ce qui est amplement suffisant pour avoir (1).

Exercice n°3

1. On a clairement

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_k}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = m_n,$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N_n^2) &= \sum_{1\le j,k\le n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_j}\,\mathbf{1}_{A_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_k}) + 2\sum_{1\le j<k\le n} \mathbb{P}(A_j\cap A_k) \\
&= m_n + 2\theta_n m_n^2.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathrm{Var}(N_n) = \mathbb{E}(N_n^2) - \mathbb{E}(N_n)^2 = m_n + (2\theta_n - 1)m_n^2.$$

2. (a) D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|N_n - m_n| \ge |m_n| - |N_n| = m_n - N_n\,;$$

donc si l'on suppose $N_n \le x$, il vient

$$|N_n - m_n| \ge m_n - x > 0.$$

(b) D'après (a), on a l'inclusion

$$\{N_n \le x\} \subset \{|N_n - m_n| \ge m_n - x\} = \{|N_n - m_n|^2 \ge (m_n - x)^2\}\,;$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Markov pour obtenir

$$\mathbb{P}(N_n \le x) \le \mathbb{P}(|N_n - m_n|^2 \ge (m_n - x)^2) \le \frac{\mathrm{Var}(N_n)}{(m_n - x)^2}.$$

3. (a) Fixons $x \in \mathbb{R}$. Puisque $m_n \to \infty$, il existe $n_0 = n_0(x) \ge 1$ tel que pour tout $n \ge n_0$, on ait $1 - \frac{x}{m_n} \ge \frac{1}{2}$ (et en particulier $x < m_n$) et d'après 2.(b) on déduit pour tout $n \ge n_0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_n \le x) &\le \frac{m_n + (2\theta_n - 1)m_n^2}{(m_n - x)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{m_n} + 2\theta_n - 1}{\left(1 - \frac{x}{m_n}\right)^2} \\
&\le 4\left(\frac{1}{m_n} + 2\theta_n - 1\right).
\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{m_n} \to 0$ et $\liminf_n \theta_n \le \frac{1}{2}$, la limite inférieure du membre de droite est au plus 0 et on déduit le résultat.

(b) Fixons $x \in \mathbb{R}$. Puisque l'on a pour tout $n \ge 1$,

$$\sup_{k\ge 1} N_k \le x \Longrightarrow N_n \le x,$$

on déduit

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}\left(\sup_{k\geq 1} N_k \leq x\right) \leq \mathbb{P}(N_n \leq x),$$

donc aussi

$$\forall m \geq 1, \quad \mathbb{P}\left(\sup_{k\geq 1} N_k \leq x\right) \leq \inf_{n\geq m} \mathbb{P}(N_n \leq x)\,;$$

or le membre de droite a une limite nulle lorsque $m \to \infty$; il en résulte que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\geq 1} N_k \leq x\right) = 0.$$

(c) On a

$$\sup_{k\geq 1} N_k < \infty \iff \exists m \in \mathbb{N}, \quad \sup_{k\geq 1} N_k \leq m$$

ou encore

$$\left\{\sup_{k\geq 1} N_k < \infty\right\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \uparrow \left\{\sup_{k\geq 1} N_k \leq m\right\}\,;$$

la réunion étant croissante, la continuité séquentielle de $\mathbb{P}$ et 3.(b) impliquent

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\geq 1} N_k < \infty\right) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{k\geq 1} N_k \leq m\right) = 0.$$

(d) On constate que

$$\sup_{k\geq 1} N_k = \infty \iff \text{une infinité de } A_k \text{ sont réalisés}$$

ce qui revient à

$$\left\{\sup_{k\geq 1} N_k = \infty\right\} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k\,;$$

on déduit de 3.(c)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{k\geq 1} N_k = \infty\right) = 1.$$

4. Le théorème démontré est le suivant :

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements (non tous de probabilité nulle) d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$\theta_n = \frac{\sum_{1\leq j<k\leq n} \mathbb{P}(A_j \cap A_k)}{\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\right)^2}.$$

On suppose $\liminf_{n\to\infty} \theta_n \leq 1/2$. Alors,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) < 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1}^{n} \mathbb{P}(A_n) < \infty.$$

Ce résultat est plus général que celui de l'exo 2 question 3.(b) car on ne suppose pas les A_n indépendants et lorsqu'ils le sont on a pour tout $n \geq 1$,

$$\theta_n = \frac{\sum_{1 \leq j < k \leq n} \mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)^2 + 2\sum_{1 \leq j < k \leq n} \mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}(A_k)} \leq 1/2.$$