Université de Lille 1
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2009–2010**

Devoir n° 2

Ex 1. Galette des rois

Je fais une galette des rois de 30 cm de diamètre et c'est mon fils qui y place une fève ronde de 2 cm de diamètre (en forme de couronne) au hasard sur la galette (il n'a pas encore bien compris qu'il vaut mieux la mettre au bord !). Je coupe la galette en 4 parts égales (en partant du centre de la galette). Quelle est la probabilité que le couteau touche la fève ?

Indication : On pourra modéliser la galette par un disque de centre O et de rayon 15 cm et supposer que le centre de la fève suit une loi uniforme sur le disque de centre O et de rayon 14 cm. Et on n'hésitera pas à faire des dessins !

Ex 2.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1. Montrer que $\forall u \in [0,1]$, $1 - u \leq \mathrm{e}^{-u}$.
2. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements indépendants. Montrer que
$$1 - \exp\big(-\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\big) \leq \mathbb{P}\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big).$$
3. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements.
   (a) Montrer que
   $$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Longrightarrow \mathbb{P}\big(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k\big) = 0.$$
   (b) En supposant les A_n indépendants, montrer que
   $$\mathbb{P}\big(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k\big) < 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty.$$
   Indication : on pourra montrer la contraposée.

Ex 3. Un raffinement possible

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose, pour $n \geq 1$, $p_n = \mathbb{P}(A_n)$, $m_n = p_1 + \cdots + p_n$ et

$$\theta_n = \frac{\sum_{1\leq j<k\leq n} \mathbb{P}(A_j \cap A_k)}{\big(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\big)^2}.$$

1. Soit N_n la variable aléatoire discrète définie par $N_n = \mathbf{1}_{A_1} + \cdots + \mathbf{1}_{A_n}$. Calculer $\mathrm{Var}(N_n)$ en fonction de θ_n et de m_n.
2. On suppose $x < m_n$.
   (a) Montrer que $N_n \leq x \Longrightarrow |N_n - m_n| \geq m_n - x$.
   (b) En déduire
   $$\mathbb{P}(N_n \leq x) \leq \frac{\mathrm{Var}(N_n)}{(m_n - x)^2}.$$
3. Supposons que $\lim_n m_n = \infty$ et $\liminf_n \theta_n \leq 1/2$.
   (a) Montrer que pour tout x réel, $\liminf_n \mathbb{P}(N_n \leq x) = 0$.
   (b) En déduire, en comparant des événements, que pour tout x réel
   $$\mathbb{P}\big(\sup_{k \geq 1} N_k \leq x\big) = 0.$$
   (c) Par passage à la limite (à justifier), montrer que $\mathbb{P}\big(\sup_{k\geq 1} N_k < \infty\big) = 0$.
   (d) Montrer que $\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k = \{\sup_{k\geq 1} N_k = \infty\}$ et en déduire $\mathbb{P}\big(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k\big)$.
4. Résumer le résultat obtenu en formulant un théorème. Montrer qu'il est plus général que le résultat de la dernière question de l'exercice précédent.