Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2008–2009**

Corrigé du devoir no 2

Ce sujet est celui de l'examen de deuxième session du 9 juin 2005.
Ce sujet comporte **4 pages**. Le barème indiqué est là pour vous aider à gérer votre temps et n'a pas valeur contractuelle.

Ex 1. *Franchise et plafond (5 points)*

En cas d'incendie d'un certain type de logement, la loi du coût X des « dommages aux biens » a une fonction de survie G de la forme

$$\forall t \geq 0, \quad G(t) := P(X > t) = \frac{1}{(1+t)^a},$$

où a est un paramètre *strictement* positif.

Une compagnie d'assurances propose la couverture de ce risque « dommages aux biens », par un contrat qui prévoit une franchise m et un plafond M. La franchise est destinée à éviter les déclarations de petits sinistres et ainsi à économiser sur les frais de gestion. Le plafond M limite la responsabilité de la compagnie. Notons Y le remboursement perçu par l'assuré en cas d'incendie. La règle franchise-plafond nous permet d'écrire[1]

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leq m, \\ X(\omega) & \text{si } m < X(\omega) \leq M, \\ M & \text{si } X(\omega) > M. \end{cases}$$

On note $H : [0, +\infty[\to [0,1]$, $t \mapsto H(t) := P(Y > t)$ la fonction de survie de Y. Sa représentation graphique est esquissée à la figure 1.

1) Exprimons $H(t)$ à l'aide de G dans les trois cas $0 \leq t < m$, $m \leq t < M$ et $t \geq M$.

On peut écrire, pour $t \geq 0$,

$$P(Y > t) = P(Y > t\,,\ X \leq m) + P(Y > t\,,\ m < X \leq M) + P(Y > t\,,\ X > M).$$

Or,

$$\{Y > t\,,\ X \leq m\} = \{Y > t\,,\ Y = 0\,,\ X \leq m\} = \emptyset,$$

ce qui permet d'obtenir

$$\begin{aligned} P(Y > t) &= P(Y > t\,,\ m < X) \\ &= P(Y > t\,,\ m < X \leq M) + P(Y > t\,,\ X > M). \end{aligned}$$

1. Pour simplifier, on suppose que le seul but de la franchise est d'éviter les déclarations de petits sinistres. Donc quand l'assuré est remboursé, on ne déduit pas m de son remboursement.

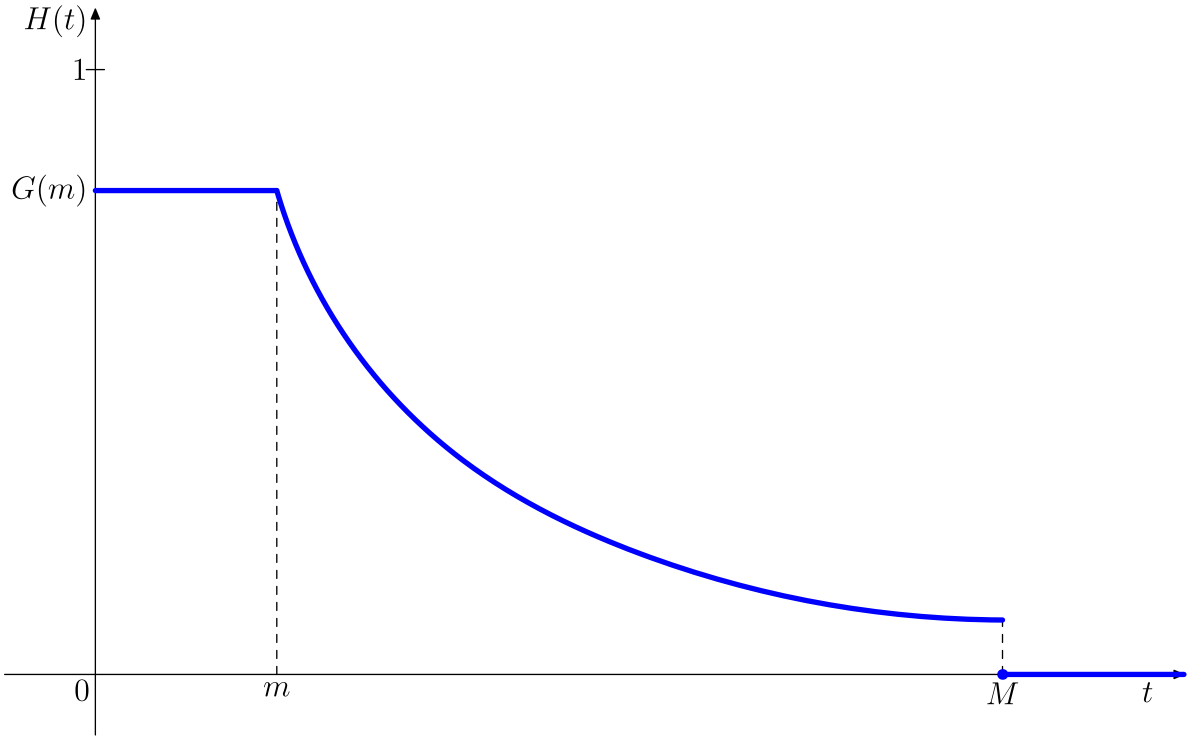

FIG. 1 – Fonction de survie H de la v.a. positive Y

• Cas où $0 \leq t < m$:
Si $X(\omega) > m$ alors $Y(\omega) = X(\omega)$ ou $Y(\omega) = M$ (suivant la valeur de $X(\omega)$) : dans les deux cas $Y(\omega) > m > t$. Autrement dit $\{X > m\} \subset \{Y > t\}$. Ainsi

$$P(Y > t) = P(Y > t\ ,\ X > m) = P(X > m) = G(m).$$

• Cas où $m \leq t < M$:
D'une part,

$$\{Y > t\ ,\ m < X \leq M\} = \{Y > t\ ,\ Y = X\ ,\ m < X \leq M\} = \{t < X \leq M\}.$$

Et d'autre part,

$$\{Y > t\ ,\ M < X\} = \{Y > t\ ,\ Y = M\ ,\ M < X\} = \{M < X\}.$$

En conclusion,

$$P(Y > t) = P(t < X \leq M) + P(X > M) = G(t).$$

• Cas où $t \geq M$:
D'une part,

$$\{Y > t\ ,\ m < X \leq M\} = \{Y > t\ ,\ Y = X\ ,\ m < X \leq M\} = \emptyset.$$

Et d'autre part,

$$\{Y > t\ ,\ M < X\} = \{Y > t\ ,\ Y = M\ ,\ M < X\} = \emptyset.$$

En conclusion,

$$P(Y > t) = 0.$$

Il est clair de part sa définition que $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) \leq M$ ce qui implique plus directement que si $t \geq M$, $P(Y > t) = 0$.

Donc, la fonction H est définie par

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ H(t) = \begin{cases} G(m) & \text{si } 0 \leq t < m, \\ G(t) & \text{si } m \leq t < M, \\ 0 & \text{si } t \geq M. \end{cases}$$

2) La loi de la variable aléatoire positive Y n'est pas à densité car

$$P(Y = 0) = P(X \leq m) = 1 - G(m) = \frac{1}{(1+m)^a},$$

en particulier $P(Y = 0) \neq 0$ ce qui ne peut se produire lorsque la loi de Y est à densité. On aurait pu également vérifier que $P(Y = M) = G(M) \neq 0$.

3) Il est clair de part sa définition, que Y est une variable aléatoire positive et donc son espérance $\mathbf{E}Y$ est définie (comme élément de $\bar{R}_+$) par

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} H(t)\, \mathrm{d}t.$$

Comme H est nulle sur $[M, +\infty[$,

$$E(Y) = \int_0^M H(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^m H(t)\, \mathrm{d}t + \int_m^M H(t)\, \mathrm{d}t = mG(m) + \int_m^M G(t)\, \mathrm{d}t.$$

Si $a = 1$, on obtient

$$E(Y) = \frac{m}{1+m} + \ln \frac{1+M}{1+m}.$$

Sinon,

$$E(Y) = \frac{m}{(1+m)^a} + (1-a)^{-1} \left[(1+M)^{1-a} - (1+m)^{1-a} \right].$$

Ex 2. *Médiane(s) et minimisation d'écart (6 points)*

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. On appelle médiane de X (ou de la loi de X), tout réel m vérifiant

$$P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}.$$

On admettra qu'il y a toujours au moins une médiane. Le but de cet exercice est de prouver la propriété de minimisation suivante. Si X est intégrable et m est une médiane de X, alors pour tout réel c,

$$\mathbf{E}|X - c| \geq \mathbf{E}|X - m|. \tag{1}$$

1) Si m est une médiane de X, $-m$ est une médiane de $-X$ car

$$P(-X \geq -m) = P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$$

et

$$P(-X \leq -m) = P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}.$$

2) On choisit une médiane m de X et on fixe $c > m$. On pose

$$Y := |X - c| - |X - m|$$

et on se propose de montrer l'inégalité $\mathbf{E}Y \geq 0$.

2.a) La variable aléatoire Y est intégrable. En effet, comme X est intégrable, les variables aléatoires $|X - m|$ et $|X - c|$ sont intégrables (car $|X - m| \leq |X| + |m|$ et $|X - c| \leq |X| + |c|$) et donc leur différence est aussi intégrable.

2.b) La décomposition $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$, où

$$Y_1 := Y\mathbf{1}_{]-\infty,m]}(X), \quad Y_2 := Y\mathbf{1}_{]m,c]}(X), \quad Y_3 := Y\mathbf{1}_{]c,+\infty[}(X)$$

est due au fait que les événements $\{X \leq m\}$, $\{m < X \leq c\}$ et $\{X > c\}$ forment une partition de l'espace Ω, autrement dit,

$$\mathbf{1}_{]-\infty,m]}(X) + \mathbf{1}_{]m,c]}(X) + \mathbf{1}_{]c,+\infty[}(X) = 1.$$

2.c) Pour $\omega \in \Omega$, on distingue les trois cas suivants :

• Si $X(\omega) \leq m$ alors $|X(\omega) - m| = m - X(\omega)$ et $|X(\omega) - c| = c - X(\omega)$. Ainsi, $Y(\omega) = c - m$ et

$$Y_1 = (c - m)\mathbf{1}_{]-\infty,m]}(X).$$

• Si $m < X(\omega) \leq c$ alors $|X(\omega) - m| = X(\omega) - m$ et $|X(\omega) - c| = c - X(\omega)$. Ainsi, $Y(\omega) = c + m - 2X(\omega)$ et

$$Y_2 = (m + c - 2X)\mathbf{1}_{]m,c]}(X).$$

• Si $X(\omega) > c$ alors $|X(\omega) - m| = X(\omega) - m$ et $|X(\omega) - c| = X(\omega) - c$. Ainsi, $Y(\omega) = c + m - 2X(\omega)$ et

$$Y_3 = (m - c)\mathbf{1}_{]c,+\infty[}(X).$$

2.d) On justifie l'inégalité $Y_2 \geq (m - c)\mathbf{1}_{]m,c]}(X)$ par :
– si $m < X(\omega) \leq c$ alors $Y_2(\omega) = m + c - 2X(\omega) \geq m - c$,
– sinon $Y_2(\omega) = 0$ et $(m - c)\mathbf{1}_{]m,c]}(X) = 0$.
On en déduit que

$$Y \geq (c - m)\mathbf{1}_{]-\infty,m]}(X) + (m - c)\mathbf{1}_{]m,+\infty[}(X).$$

Ce qui permet de conclure en prenant l'espérance (on utilise la linéarité de l'espérance pour des variables aléatoires intégrables) :

$$\mathbf{E}Y \geq (c - m)\big(P(X \leq m) - P(X > m)\big).$$

2.e) Or par définition de m, $P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$ et $P(X > m) = 1 - P(X \leq m) \leq \frac{1}{2}$. Donc, $P(X \leq m) - P(X > m) \geq 0$ ce qui permet de conclure sur la positivité de $\mathbf{E}Y$.

3) On a donc montrer que pour tout $c > m$,

$$\mathbf{E}|X - c| \geq \mathbf{E}|X - m|.$$

Et pour $c < m$, on applique la propriété précédente à $-X$ (qui a pour médiane $-m$) et à $-c$ (qui vérifie $-c > -m$) pour conclure que pour tout $c < m$,

$$\mathbf{E}|X - c| \geq \mathbf{E}|X - m|.$$

Ce qui complète la démonstration de la propriété de minimisation (1).

4) Si m et m' sont deux médianes de X, alors on applique deux fois la propriété de minimisation (1)

– à la médiane m et à $c = m'$:

$$\mathbf{E}|X - m'| \geq \mathbf{E}|X - m|,$$

– à la médiane m' et à $c = m$:

$$\mathbf{E}|X - m| \geq \mathbf{E}|X - m'|.$$

On conclut alors que $\mathbf{E}|X - m| = \mathbf{E}|X - m'|$.

Ex 3. *Loi uniforme sur le disque unité et localisation de sommes (10 points)*

Dans cet exercice, on note D le disque unité ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour la distance euclidienne, $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$. On note $M := (X, Y)$ un vecteur aléatoire suivant la loi uniforme sur D et on pose

$$R := (X^2 + Y^2)^{1/2} = \|(X, Y)\|_2.$$

1) On note F la fonction de répartition de la variable aléatoire positive R. Montrer que F est donnée par

$$F(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0, \\ r^2 & \text{si } 0 < r \leq 1, \\ 1 & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

En effet,

$$\begin{aligned} F(r) = P(R \leq r) &= P(\sqrt{X^2 + Y^2} \leq r) \\ &= \frac{1}{\lambda(D)} \lambda(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq r\}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0, \\ r^2 & \text{si } 0 < r \leq 1, \\ 1 & \text{si } r > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

2) Calculer $\mathbf{E}R$.

$$E(R) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))dt = \int_0^1 (1 - t^2)dt = 2/3.$$

3) Expliquez pourquoi la loi de R admet une densité f et calculez f.

F est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc R admet pour densité la fonction f définie pour tout réel r par

$$f(r) = 2r\mathbf{1}_{]0,1]}(r).$$

4)

4.a) Calculez $\mathbf{E}(R^2)$.

$E(R^2) = \int_0^{+\infty}(1 - F_{R^2}(t))dt$ où pour tout réel positif t,

$$F_{R^2}(t) = P(R^2 \leq t) = P(R \leq \sqrt{t}) = F(\sqrt{t}).$$

Ainsi,

$$E(R^2) = \int_0^1 (1-t)dt = 1/2.$$

4.b) Expliquez pourquoi X et Y ont méme loi.

Pour tout réel t, notons $A_t =]-\infty, t]$. On a

$$\begin{aligned}
P(X \leq t) &= P(X \in A_t) \\
&= P((X,Y) \in A_t \times \mathbb{R}) \\
&= \frac{\lambda(A_t \times \mathbb{R}) \cap D)}{\lambda(D)} \\
&= \frac{\lambda(\mathbb{R} \times A_t) \cap D)}{\lambda(D)} \\
&= P((X,Y) \in \mathbb{R} \times A_t) \\
&= P(Y \in A_t) \\
&= P(Y \leq t).
\end{aligned}$$

Les fonctions de répartition de X et Y sont égales donc X et Y ont même loi.

4.c) En déduire sans calcul les valeurs de $\mathbf{E}(X^2)$ et $\mathbf{E}(Y^2)$.

Comme X et Y ont la même loi, on a $E(X^2) = E(Y^2)$. On en déduit $1/2 = E(R^2) = 2E(X^2)$ et $E(X^2) = E(Y^2) = 1/4$.

5) On note C le carré $[1-\varepsilon, 1]^2$ avec $\varepsilon > 0$ choisi suffisamment petit pour que $C \cap D = \emptyset$ (faites un dessin).

5.a) Que vaut $P(M \in C)$?

$$P(M \in C) = \frac{\lambda(C \cap D)}{\lambda(D)} = 0.$$

5.b) Justifiez l'inégalité $P(X \in [1-\varepsilon, 1]) > 0$ à l'aide d'une interprétation géométrique de cette probabilité.

$$P(X \in [1-\varepsilon, 1]) = P((X,Y) \in [1-\varepsilon, 1] \times \mathbb{R}) = \frac{1}{\lambda(D)}\lambda(([1-\varepsilon, 1] \times \mathbb{R}) \cap D) > 0.$$

On peut remarquer également que $P(Y \in [1-\varepsilon, 1]) = P(X \in [1-\varepsilon, 1])$.

5.c) X et Y sont-elles indépendantes ?

$$0 = P((X,Y) \in [1-\varepsilon, 1]^2) \neq P(Y \in [1-\varepsilon, 1])P(X \in [1-\varepsilon, 1]) > 0.$$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

6) Expliquez pourquoi X est intégrable et la loi de X est *symétrique*, *i.e.* X et $-X$ ont méme loi. En déduire sans calcul que $\mathbf{E}X = 0$. Comme Y a méme loi que X, il est clair que tout ceci vaut aussi pour Y.

En effet, X est intégrable car $E|X| \leq \sqrt{E(X^2)} = 1/2$. D'autre part, si $A_t =]-\infty, t]$ pour tout réel t alors

$$\begin{aligned} P(X \in A_t) &= \frac{\lambda((A_t \times \mathbb{R}) \cap D)}{\lambda(D)} \\ &= \frac{\lambda((-A_t \times \mathbb{R}) \cap D)}{\lambda(D)} \quad \text{car } \lambda \text{ est invariante par symétrie} \\ &= P(-X \in A_t). \end{aligned}$$

Ainsi X et $-X$ ont même loi.

7) On considère une suite $(M_i)_{i \geq 1}$ de vecteurs aléatoires indépendants et de méme loi que M. On note $M_i = (X_i, Y_i)$ et on pose

$$S_n := \sum_{i=1}^n M_i, \quad S'_n := \sum_{i=1}^n X_i, \quad S''_n := \sum_{i=1}^n Y_i,$$

ainsi $S_n = (S'_n, S''_n) \in \mathbb{R}^2$. On assimile le vecteur aléatoire S_n au point aléatoire ayant les mémes coordonnées et on se propose de *localiser* ce point.

7.a) Que vaut $P(\|S_n\|_2 \leq n)$?

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\|S_n\|_2 = \|\sum_{i=1}^n M_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^n \|M_i\|_2 \leq nR \leq n \text{ p.s.}$$

Autrement dit : $P(\|S_n\|_2 \leq n) = 1$.

7.b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $t > 0$,

$$P\big(\|S_n\|_2 \geq t\sqrt{n}\big) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Indication. On pourra utiliser aprés justification le fait que si U et V sont deux variables aléatoires quelconques $P(U+V \geq \varepsilon) \leq P(U \geq \varepsilon/2) + P(V \geq \varepsilon/2)$.

$$\begin{aligned}
P(\|S_n\|_2 \geq t\sqrt{n}) &= P((S_n')^2 + (S_n'')^2 \geq t^2 n) \\
&\leq P((S_n')^2 \geq t^2 n/2) + P((S_n'')^2 \geq t^2 n/2) \\
&\leq \frac{2E((S_n')^2)}{nt^2} + \frac{2E((S_n'')^2)}{nt^2} \quad \text{par l'inégalité de Markov} \\
&= \frac{2nE(X^2)}{nt^2} + \frac{2nE(Y^2)}{nt^2} \\
&= \frac{1}{t^2}
\end{aligned}$$

7.c) On prend comme unité le centimètre, D est donc le disque de centre O et de rayon 1 cm. Donner un minorant de la probabilité que S_{10000} se trouve à au plus 5 mêtres de l'origine O.

Ici on choisit $n = 10000$ et $t = 5$ et on applique l'inégalité établie à la question précédente :

$$P(\|S_{10000}\|_2 \leq 500) = 1 - P(\|S_{10000}\|_2 \geq 5\sqrt{10000}) \geq 1 - \frac{1}{5^2}.$$