Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2006–2007**

Devoir n° 2
À rendre la semaine du 11 décembre 2006

Ex 1. Produit de deux v.a. uniformes

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

1) On pose $Z := XY$ et on demande de calculer la fonction de répartition H de Z. *Indication :* le couple (X, Y) suit la loi uniforme sur le carré unité[1] $[0, 1]^2$. On peut utiliser ceci pour ramener le calcul de $P(XY \leq t)$ pour $0 < t \leq 1$ fixé à un calcul d'aire.

2) Dessinez le graphe de la f.d.r. H. La loi de Z est-elle à densité ? Si oui, calculez la.

3) Calculez l'espérance de Z à l'aide de la f.d.r. et vérifiez ce résultat en utilisant une autre méthode exploitant l'indépendance de X et Y.

Ex 2. Peut-on utiliser le th. de Beppo Levi avec une suite décroissante ?

La réponse à cette question provocatrice est fournie par le théorème suivant.

Théorème (de convergence décroissante)**.**
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite* décroissante *de v.a. positives définies sur le même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. On suppose de plus que* $\mathbf{E}X_1 < +\infty$*. Alors la suite* $(\mathbf{E}X_n)_{n\geq 1}$ *converge en décroissant vers* $\mathbf{E}X$*, où la v.a.* X *est définie par* $X(\omega) = \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)$*, pour tout* $\omega \in \Omega$*.*

1) Démontrez ce théorème en appliquant le théorème de Beppo Levi à une suite *croissante* convenablement construite.

2) Soit U une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F})$, à valeurs dans $]0, 1]$ et de loi uniforme sur $]0, 1]$. On considère la suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ par

$$X_n = \frac{1}{U}\mathbf{1}_{]0,1/n]}(U).$$

Vérifiez qu'elle est décroissante et converge simplement vers 0 sur tout Ω. Que vaut $\mathbf{E}X_n$? Quel est l'intérêt de cette question ?

Ex 3. Fonction de répartition d'un quotient

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $]0, +\infty[$. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes.

1. Vous pouvez admettre ce résultat, cf. polycopié d'IPÉ 2006–2007, prop. 5.35 a) (vecteur à densité et indépendance des composantes) et l'exemple 5.12.

On note H la fonction de répartition de Y. On se propose d'étudier la fonction F définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) := \mathbf{E}H(tX), \tag{1}$$

avec une application à la loi de certains quotients de v.a.

Les questions 1) à 4) vont nous permettre de vérifier que F est une fonction de répartition. On pourra si le besoin s'en fait sentir, utiliser le théorème établi à l'exercice 2.

1) Pourquoi F est-elle bien définie et à valeurs dans $[0, 1]$?

2) Montrez que F est croissante.

3) Déterminez les limites de F en $-\infty$ et $+\infty$. Pour la limite en $+\infty$, on commencera par établir que si $(t_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de réels tendant vers $+\infty$, $F(t_n)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

4) En considérant une suite décroissante quelconque $(t_n)_{n\geq 1}$ de limite t et la suite de v.a. $(H(t_nX))_{n\geq 1}$, montrez que F est continue à droite au point t. Comme F est monotone, elle a automatiquement une limite à gauche en tout point ; conclusion ?

5) On suppose dans cette question que la variable aléatoire X est discrète. Montrez que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}H(tX) = P\Big(\frac{Y}{X} \leq t\Big). \tag{2}$$

Ainsi dans ce cas particulier, F est la f.d.r. de Y/X.

6) Revenant au cas général, montrez que F est la f.d.r. de Y/X. *Indication :* on pourra utiliser une suite décroissante $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires positives discrètes, convergente simplement sur tout Ω vers X. L'existence d'une telle suite pourra être admise à ce stade. Un exemple vous est proposé en question facultative ci-dessous.

7) Appliquez le résultat précédent pour calculer explicitement la f.d.r. de Y/X, quand X et Y suivent des lois exponentielles de paramètre respectif a et b. La v.a. positive Y/X est-elle intégrable ?

8) *(question facultative).* Voici un exemple de suite $(X_n)_{n\geq 1}$ ayant les propriétés requises à la question 6). On pose

$$\forall n \geq 1,\ \forall \omega \in \Omega, \quad X_n(\omega) := \frac{[10^n X(\omega)] + 1}{10^n},$$

où $[x]$ désigne la *partie entière* du réel positif x, c'est-à-dire l'unique entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq x < k + 1$. Pourquoi les X_n sont-elles discrètes ? Vérifiez que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers X sur Ω. Pour prouver la décroissance de $(X_n)_{n\geq 1}$, on pourra commencer par montrer que tout réel positif x vérifie pour tout entier $n \geq 1$:

$$[10^{n+1}x] = 10[10^n x] + r_n,$$

où r_n est un entier compris entre 0 et 9.