Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math 314 **Année 2007–2008**

Corrigé du devoir n° 1

Le devoir est constitué de trois exercices. Le premier sert d'introduction au deuxième [1] et le troisième est indépendant des deux premiers.

Ex 1. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est notée F_X. On définit la variable aléatoire $Y := (X + \ln\alpha)_+$ où α est un réel strictement positif et $(x)_+ := \max(0, x)$ désigne la partie positive d'un réel x.

1) *Fonction de répartition de Y (exprimée en fonction de celle de X).*

Soit $t \in \mathbb{R}$, $F_Y(t) = P\left((X + \ln\alpha)_+ \leq t\right)$.
Si $t < 0$ alors $F_Y(t) = 0$.
Si $t \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P\left((X+\ln\alpha)_+ \leq t\ ,\ X + \ln\alpha \leq 0\right) + P\left((X+\ln\alpha)_+ \leq t\ ,\ X + \ln\alpha > 0\right) \\ &= P\left(X \leq -\ln\alpha\right) + P\left(-\ln\alpha < X \leq t - \ln\alpha\right) \\ &= P\left(X \leq t - \ln\alpha\right). \end{aligned}$$

En conclusion,

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ F_X(t - \ln\alpha) & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Dans toute la suite, la fonction de répartition F_X est donnée par

$$F_X(t) = \exp(-\mathrm{e}^{-t}) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

2) *F_X est une fonction de répartition.*

En effet, c'est clairement une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ (comme l'itérée d'ordre 2 de la fonction décroissante $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$), continue sur $\mathbb{R}$ (donc, continue à droite limitée à gauche) ayant une limite nulle en $-\infty$ et égale à 1 en ∞.

3) *La loi de X est à densité, de densité f_X.*

Comme la fonction F_X est C^1 sur $\mathbb{R}$, X admet une densité $f_X = F_X'$: pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_X(x) = \exp\left(-x - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

4) *Intégrabilité de X et calcul de son espérance*

1. Les deux premiers exercices sont une version améliorée d'une partie du sujet de l'examen IPE du 18 janvier 2007

Pour montrer l'intégrabilité de X, on montre la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \exp\left(-x - \mathrm{e}^{-x}\right) \, \mathrm{d}x.$$

La convergence en $+\infty$ se montre à l'aide de la majoration,

$$|x| \exp\left(-x - \mathrm{e}^{-x}\right) \leq |x|\mathrm{e}^{-x},$$

valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ (l'intégrale $\int^{+\infty} |x|\mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$ est clairement convergente).

Pour l'intégrabilité en $-\infty$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} |x| \exp\left(-x - \mathrm{e}^{-x}\right) \, \mathrm{d}x &= \int_{0}^{+\infty} u \exp\left(u - \mathrm{e}^{u}\right) \, \mathrm{d}u \\
&\leq \int_{0}^{+\infty} u \exp\left(u - \frac{u^2}{2}\right) \, \mathrm{d}u \\
&= \int_{0}^{+\infty} u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\left(1 - \frac{2}{u}\right)\right) \, \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

On a utilisé la minoration $\mathrm{e}^u \geq \frac{u^2}{2}$ pour obtenir la première inégalité. La convergence en $+\infty$ de la dernière intégrale permet de conclure.

Comme X est intégrable, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-x - \mathrm{e}^{-x}\right) \mathrm{d}x$. On effectue alors le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-x}$ pour obtenir

$$E(X) = -\int_{0}^{+\infty} \ln(u) e^{-u} \, \mathrm{d}u.$$

5) *Fonction de répartition de Y et graphe de cette fonction.*

En appliquant le résultat de la question 1), on obtient

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \exp\left(-\alpha \mathrm{e}^{-t}\right) & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

dont le graphe est donné par la figure 1.

6) *La loi de la variable aléatoire Y est-elle discrète ? à densité ?*

La loi de Y n'est pas discrète car la somme des sauts de sa fonction de répartition ne fait pas 1. En effet, sa fonction de répartition possède un seul saut d'une hauteur de $\mathrm{e}^{-\alpha}$ et $\alpha > 0$.

La loi de Y n'est pas non plus à densité car si elle l'était, sa fonction de répartition serait continue (ce qui n'est clairement pas le cas).

7) *Intégrabilité de Y et encadrement de son espérance.*

Comme Y est une variable aléatoire positive, son espérance $E(Y)$ est définie dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ par

$$E(Y) = \int_{0}^{+\infty} P(Y > t) \, \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} \left(1 - \exp\left(-\alpha \mathrm{e}^{-t}\right)\right) \, \mathrm{d}t.$$

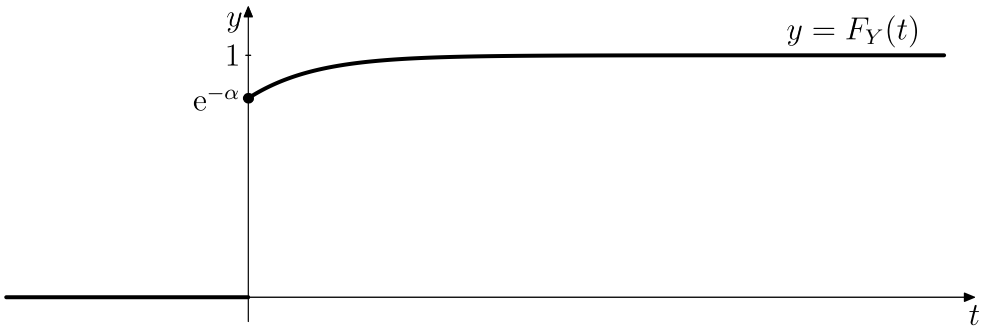

FIG. 1 – Graphe de la fonction de répartition de Y

Or, en utilisant l'encadrement $0 \leq 1 - \exp(-u) \leq u$ valable pour tout réel $u \geq 0$, on obtient

$$0 \leq E(Y) \leq \int_0^{+\infty} \alpha e^{-t}\, dt = \alpha.$$

Ce qui démontre l'intégrabilité de Y et l'encadrement $0 \leq E(Y) \leq \alpha$.

Ex 2. On considère une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires positives indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1 définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $Z_n := \max(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

a) *Fonction de répartition F_n de Z_n ?*

Soit t un réel,

$$\begin{aligned} F_n(t) &= P(Z_n \leq t) \\ &= P(\max(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \leq t) \\ &= P(\varepsilon_1 \leq t \ , \ , \ldots \ , \ \varepsilon_n \leq t) \\ &= P(\varepsilon_1 \leq t) \ldots P(\varepsilon_n \leq t) \\ &= P(\varepsilon_1 \leq t)^n \ . \end{aligned}$$

L'avant dernière égalité est due à l'indépendance des $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ et la dernière égalité à l'équidistribution des $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$. Comme la fonction de répartition d'une loi exponentielle est donnée par

$$P(\varepsilon_1 \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

On conclut que

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (1 - e^{-t})^n & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

b) *Monotonie de la suite $(\{Z_n \geq M\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ où M est un réel positif fixé.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, remarquons que $Z_{n+1} = \max(Z_n, \varepsilon_{n+1}) \geq Z_n$. Donc, si $Z_n(\omega) \geq M$ alors $Z_{n+1}(\omega) \geq M$. Ce qui montre l'inclusion $\{Z_n \geq M\} \subset \{Z_{n+1} \geq M\}$. Donc la suite $(\{Z_n \geq M\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'événements. On en déduit que

$$\bigcap_{m\geq n}\{Z_m \geq M\} = \{Z_n \geq M\}.$$

En effet, si $Z_n(\omega) \geq M$ alors $Z_m(\omega) \geq M$ pour tout entier $m \geq n$ puisque $Z_m \geq Z_n$, ce qui montre $\{Z_n \geq M\} \subset \bigcap_{m\geq n}\{Z_m \geq M\}$. Et réciproquement, si $Z_m(\omega) \geq M$ pour tout entier $m \geq n$ alors en particulier $Z_n(\omega) \geq M$ ce qui montre $\bigcap_{m\geq n}\{Z_m \geq M\} \subset \{Z_n \geq M\}$.

c) *Calcul de la probabilité de l'événement* $A_M := \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{m\geq n}\{Z_m \geq M\}$.
D'après la question précédente, on peut écrire l'événement A_M comme une union croissante d'événements :

$$A_M = \bigcup_{n\geq 1}\{Z_n \geq M\}.$$

Et donc, par continuité séquentielle monotone

$$P(A_M) = \lim_{n\to+\infty} P(Z_n \geq M).$$

Or

$$P(Z_n \geq M) = 1 - F_n(M) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-M}\right)^n.$$

Comme $M > 0$ est fixé, $\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \geq M) = 1$ et donc, $P(A_M) = 1$.

d) *Calcul de la probabilité de* $A := \bigcap_{M\in\mathbb{N}^*} A_M$.
Par passage au complémentaire,

$$P(A^c) = P\left(\bigcup_{M\in\mathbb{N}^*} A_M^c\right) \leq \sum_{M\in\mathbb{N}^*} P\left(A_M^c\right) = 0.$$

Donc, $P(A) = 1$. Donc, si $\omega \in A$, quelque soit $M > 0$, il existe $n(\omega, M)) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $m \geq n(\omega, M)$, $Z_m(\omega) \geq M$. Autrement dit, sur un événement de probabilité 1 (A), Z_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang. On en déduit que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge presque sûrement.

e) *Convergence en loi de la suite* $(Z_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *vers* X.
Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé, pour n suffisamment grand $(n \geq \mathrm{e}^{-t})$

$$\begin{aligned} F_n(t + \ln n) &= (1 - \exp(-t - \ln n))^n \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-t}/n\right)\right) \\ &= \exp\left(-\mathrm{e}^{-t} + \epsilon_t(n)\right), \end{aligned}$$

car $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-t}\right) = -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{n}\epsilon_t(n)$ où $\lim_{n\to+\infty}\epsilon_t(n) = 0$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(t + \ln n) = F_X(t),$$

où F_X est la fonction de répartition définie par (1) de l'exercice 1.

2) Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre α définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et indépendante de la suite des $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On définit la variable aléatoire Z par, pour $\omega \in \Omega$,

$$Z(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad N(\omega) = 0 \\ \max\left\{\varepsilon_1(\omega), \dots, \varepsilon_{N(\omega)}(\omega)\right\} & \text{si} \quad N(\omega) \geq 1, \end{cases}$$

a) *Valeur de $P(Z \leq t | N = n)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$.*
Cas $n = 0$,

$$P(Z \leq t | N = 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Cas $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(Z \leq t | N = n) &= \frac{P\left(\{Z \leq t\} \cap \{N = n\}\right)}{P(N = n)} \\ &= \frac{P\left(\{\max(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \leq t\} \cap \{N = n\}\right)}{P(N = n)} \\ &= P\left(\max(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \leq t\right) \\ &= F_n(t), \end{aligned}$$

l'avant dernière égalité étant due à l'indépendance de la variable aléatoire N avec la suite des $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) *Fonction de répartition de Z et loi de Z*
Soit $t \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition F_Z de Z est donnée par

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z \leq t | N = n) P(N = n).$$

Si $t < 0$, alors $F_Z(t) = 0$ car tous les termes $P(Z \leq t | N = n)$ $(n \in \mathbb{N})$ sont nuls.
Si $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathrm{e}^{-\alpha} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} F_n(t)\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (1 - \mathrm{e}^{-t})^n\right) \\ &= \exp\left(-\alpha \mathrm{e}^{-t}\right). \end{aligned}$$

En conclusion, $F_Z(t) = F_Y(t)$ pour tout réel t et Z a la même loi que la variable aléatoire Y définie à l'exercice 1.

Ex 3. Vous reprendrez bien un peu de vecteurs gaussiens ? [2]

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indépendantes et de même loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$. Soient a et b des réels

2. Exercice extrait du sujet d'examen d'I.S. deuxième session, juin 2007.

vérifiant $a^2 + b^2 = 1$. On définit les variables aléatoires Y_1 et Y_2 par l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

1) Les variables aléatoires X_1 et X_2 étant *indépendantes* et *gaussiennes*, le vecteur aléatoire (X_1, X_2) est donc gaussien dans $\mathbb{R}^2$. Le vecteur aléatoire (Y_1, Y_2) apparaît donc comme l'image par une application *linéaire* d'un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^2$: c'est lui-même un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^2$.

2) *Vecteur espérance de* (Y_1, Y_2) *:*

$$E(Y_1) = E(aX_1 - bX_2) = aE(X_1) - bE(X_2) = 0,$$

la deuxième égalité provenant de la linéarité de l'espérance, la troisième du centrage de X_1 et X_2. De façon analogue, on obtient $E(Y_2) = 0$.
Matrice de covariance de (Y_1, Y_2) *:* les variables aléatoires X_1 et X_2 étant indépendantes,

$$\mathrm{Var}(Y_1) = \mathrm{Var}(aX_1 - bX_2) = a^2\mathrm{Var}(X_1) + b^2\mathrm{Var}(X_2) = a^2 + b^2 = 1.$$

On obtient de même $\mathrm{Var}(Y_2) = 1$. Pour finir de déterminer la matrice de covariance de (Y_1, Y_2), il reste à calculer la covariance des deux variables :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) &= E(Y_1Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) \\ &= E\big((aX_1 - bX_2)(bX_1 + aX_2)\big) \\ &= E(abX_1^2 - abX_2^2 + (a^2 - b^2)X_1X_2) \\ &= abE(X_1^2) - abE(X_2^2) + (a^2 - b^2)E(X_1X_2) = 0, \end{aligned}$$

car $E(X_1^2) = E(X_2^2) = 1$ et $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2) = 0$.
Nous savons que la loi d'un vecteur gaussien est caractérisée par son vecteur espérance et sa matrice de covariance. Les vecteurs (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) sont gaussiens, de même vecteur espérance et de même matrice de covariance, ils ont donc même loi.

3) On sait que la matrice de la rotation de centre $(0, 0)$ et d'angle 38°par rapport à la base usuelle de $\mathbb{R}^2$ est

$$\begin{pmatrix} \cos 38 & -\sin 38 \\ \sin 38 & \cos 38 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est exactement de la forme décrite précédemment, il est donc immédiat que l'image par cette rotation de (X_1, X_2) est encore un vecteur gaussien, de même loi que celle de (X_1, X_2).