Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IS Math 314 **Année 2007–2008**

Devoir n° 1

A rendre la semaine du 31 Mars 2008

Le devoir est constitué de trois exercices. Le premier sert d'introduction au deuxième et le troisième est indépendant des deux premiers.

Ex 1. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est notée F_X. On définit la variable aléatoire $Y := (X + \ln\alpha)_+$ où α est un réel strictement positif et $(x)_+ := \max(0, x)$ désigne la partie positive d'un réel x.

1) Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X.

2) Dans toute la suite, la fonction de répartition F_X est donnée par

$$F_X(t) = \exp(-\mathrm{e}^{-t}) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Vérifier que F_X est une fonction de répartition.

3) Montrer que la loi de X est à densité et donner sa densité f_X.

4) Montrer que X est intégrable et que son espérance est :

$$E(X) = -\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

5) Donner la fonction de répartition de Y et tracer sommairement le graphe de cette fonction.

6) La loi de la variable aléatoire Y est-elle discrète ? à densité ?

7) Montrer que Y est intégrable et que $0 \leq \mathbf{E}(Y) \leq \alpha$.

Ex 2. On considère une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires positives indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1 définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $Z_n := \max(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

a) Quelle est la fonction de répartition F_n de Z_n ?

b) Soit $M > 0$ positif fixé, montrer que la suite $(\{Z_n \geq M\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'événements et en déduire l'égalité $\bigcap_{m\geq n} \{Z_m \geq M\} = \{Z_n \geq M\}$.

c) Calculer alors la probabilité de l'événement $A_M := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} \{Z_m \geq M\}$.

d) On note $A := \bigcap_{M\in\mathbb{N}^*} A_M$. Calculer sa probabilité. Que pouvez-vous en déduire sur le comportement de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

e) Montrer qu'à $t \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(t + \ln n) = F_X(t),$$

où F_X est la fonction de répartition définie par (1) de l'exercice 1. *On dit alors que la suite $(Z_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.*

2) Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre α définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et indépendante de la suite des $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On définit la variable aléatoire Z par, pour $\omega \in \Omega$,

$$Z(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad N(\omega) = 0 \\ \max\left\{\varepsilon_1(\omega), \ldots, \varepsilon_{N(\omega)}(\omega)\right\} & \text{si} \quad N(\omega) \geq 1, \end{cases}$$

a) Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $P(Z \leq t | N = n)$. *Indication* : on pourra traiter à part le cas $n = 0$.

b) En déduire la fonction de répartition de Z et montrer que Z a la même loi que la variable aléatoire Y définie à l'exercice 1.

Ex 3. *Vous reprendrez bien un peu de vecteurs gaussiens ?*[1]

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indépendantes et de même loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$. Soient a et b des réels vérifiant $a^2 + b^2 = 1$. On définit les variables aléatoires Y_1 et Y_2 par l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

1) Expliquez *sans aucun calcul* pourquoi le vecteur aléatoire $V = (Y_1, Y_2)$ est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^2$.

2) Calculez le vecteur espérance et la matrice de covariance de (Y_1, Y_2). Comparez les lois des vecteurs (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2).

3) Que peut-on dire du vecteur aléatoire image de (X_1, X_2) par une rotation de centre $(0, 0)$ et d'angle 38° ?

1. Exercice extrait du sujet d'examen d'I.S. deuxième session, juin 2007.