Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2009–2010**

Devoir n° 1. Jeu de dés.

A rendre la semaine du 9 novembre.

On effectue une suite infinie de lancers indépendants de deux dés bien équilibrés. On note $\Omega_1 = \{1, \dots, 6\}^2$ et $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace de probabilité[1] correspondant à l'expérience aléatoire avec $\Omega = \Omega_1^{\mathbb{N}^*}$. On s'intéresse au premier instant où l'on obtient deux doubles de suite. On considère ainsi les événements (indépendants) D_n : « on obtient un double au n-ième lancer » pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Question préliminaire. Calculer $p = P(D_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

L'événement D_n dont on demande de calculer la probabilité ne concerne que le n-ième lancer. On peut donc considérer que les résultats possibles sont modélisés par Ω_1. Par ailleurs l'hypothèse d'équiprobabilité est naturelle. Ceci entraîne alors que, dans cette modélisation, $\mathrm{Card}(D_n) = 6$, d'où $P(D_n) = 6/36 = 1/6$.

I/ Pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement « on n'obtient *pas* deux doubles de suite au cours des n premiers lancers » et on pose $a_n = P(A_n)$. Remarquons que $A_1 = \Omega$ et $a_1 = 1$.

1) *Mise en route* : calcul des premiers termes.

a) Pour calculer a_2, on remarque que $A_2 = (D_1 \cap D_2)^c$, d'où $P(A_2) = 1 - 1/36 = 35/36$, en se servant de l'indépendance de deux lancers distincts.

b) Pour déterminer a_3, la probabilité de A_3, on se sert de la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\{D_3, D_3^c\}$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} a_3 &= P(A_3|D_3)P(D_3) + P(A_3|D_3^c)P(D_3^c) \\ &= P(D_2^c)P(D_3) + P(A_2)P(D_3^c) \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{35}{36} \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{205}{216}, \end{aligned}$$

la deuxième égalité venant du fait que, si l'on obtient un double au troisième lancer, l'événement A_3 est alors réalisé uniquement dans le cas où l'on n'obtient pas un double au deuxième lancer. De même, si l'on n'a pas obtenu un double au troisième lancer, A_3 est réalisé uniquement si lors des deux premiers lancers, on n'a pas obtenu deux doubles consécutifs.

[1] On ne demande pas de décrire la tribu $\mathcal{F}$ et tous les événements considérés sont supposés appartenir à $\mathcal{F}$.

2) *Relation de récurrence* : le but de cette question est d'établir une relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en exprimant $P(A_{n+2})$ en fonction de $P(A_{n+1})$ et de $P(A_n)$ pour tout $n \geq 1$ (en conditionnant par rapport au $(n+2)$-ième lancer). Soit $n \geq 1$,

a) Pour tout $n \geq 1$, $\{D_{n+1}, D_{n+1}^c\}$ forme une partition de Ω. On a donc

$$P(A_{n+2} \cap D_{n+2}) = P(A_{n+2} \cap D_{n+2} \cap D_{n+1}) + P(A_{n+2} \cap D_{n+2} \cap D_{n+1}^c). \quad (1)$$

Mais $D_{n+2} \cap D_{n+1}$ est l'événement où l'on a obtenu un double aux $(n+1)$-ième et $(n+2)$-ième lancers, ce qui entraîne aussitôt $A_{n+2} \cap D_{n+2} \cap D_{n+1} = \emptyset$, et la nullité de la première probabilité du membre de droite de (1). La définition d'une probabilité conditionnelle permet de réécrire la seconde probabilité pour aboutir à l'égalité suivante

$$P(A_{n+2} \cap D_{n+2}) = P(A_{n+2} | D_{n+1}^c \cap D_{n+2}) P(D_{n+1}^c \cap D_{n+2}).$$

b) Pour exploiter la formule que nous venons d'établir, il faudrait connaître $P(A_{n+2} | D_{n+1}^c \cap D_{n+2})$. Or, conditionnellement à $D_{n+1}^c \cap D_{n+2}$, la réalisation de A_{n+2} « revient » à ne pas obtenir deux doubles de suite au cours des n premiers lancers. D'où

$$P(A_{n+2} | D_{n+1}^c \cap D_{n+2}) = P(A_n) = a_n.$$

Un raisonnement analogue conduit à

$$P(A_{n+2} | D_{n+2}^c) = P(A_{n+1}) = a_{n+1}.$$

c) A quoi servent les égalités que nous avons établies ? Lorsque l'on écrit la formule des probabilités totales pour calculer $P(A_{n+2})$, en utilisant le système complet d'événements $\{D_{n+2}, D_{n+2}^c\}$, il vient

$$\begin{aligned} P(A_{n+2}) &= P(A_{n+2} \cap D_{n+2}) + P(A_{n+2} | D_{n+2}^c) P(D_{n+2}^c) \\ &= P(A_{n+2} | D_{n+1}^c \cap D_{n+2}) P(D_{n+1}^c \cap D_{n+2}) + \frac{5}{6} a_{n+1} \\ &= \frac{5}{36} a_n + \frac{5}{6} a_{n+1}, \end{aligned}$$

d'où la formule de récurrence

$$a_{n+2} = \frac{5}{6} a_{n+1} + \frac{5}{36} a_n.$$

3) *Résolution du problème.* Cette question est consacrée à l'obtention d'une expression directe de a_n pour $n \geq 1$. Pour cela, on introduit un ensemble de suites réelles

$$\mathcal{U} = \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \ : \ u_{n+2} = \frac{5}{6} u_{n+1} + \frac{5}{36} u_n \right\}.$$

a) Pour commencer, signalons que $\mathcal{U}$ est non vide, puisque la suite identiquement nulle est évidemment dans $\mathcal{U}$. Ensuite,montrons que $\mathcal{U}$, sous-ensemble de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, est stable par combinaison linéaire. Soit u et v deux éléments de $\mathcal{U}$, et α un réel. Alors

$$\begin{aligned}(\alpha u + v)_{n+2} &= \alpha u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= \alpha(\frac{5}{6}u_{n+1} + \frac{5}{36}u_n) + (\frac{5}{6}v_{n+1} + \frac{5}{36}v_n) \\ &= \frac{5}{6}(\alpha u_{n+1} + v_{n+1}) + \frac{5}{36}(\alpha u_n + v_n) \\ &= \frac{5}{6}(\alpha u + v)_{n+1} + \frac{5}{36}(\alpha u + v)_n,\end{aligned}$$

ce qui montre que la suite $\alpha u + v$ est encore dans $\mathcal{U}$: $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, supposons qu'il existe deux éléments de $\mathcal{U}$, u et v, tels que $u_1 = a = v_1$ et $u_2 = b = v_2$. Montrons par récurrence sur n que $u_n = v_n$ pour tout $n \geq 1$. Notre hypothèse de récurrence au rang n est la suivante :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad u_k = v_k \tag{$\mathcal{H}_n$}$$

Suposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Alors

$$v_{n+1} = \frac{5}{6}v_n + \frac{5}{36}v_{n-1} = \frac{5}{6}u_n + \frac{5}{36}u_{n-1} = u_{n+1},$$

les première et troisième égalités venant de l'appartenance de v et u à $\mathcal{U}$. La deuxième égalité repose quant à elle sur $\mathcal{H}_n$, et il est important de remarquer que seule $\mathcal{H}_n$ pour $n \geq 2$ permet d'établir cette deuxième égalité. Cette remarque entraîne que pour que la récurrence soit correctement *initialisée*, il faut démarrer à $\mathcal{H}_2$, qui est bien vérifiée puisque $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$. On peut donc conclure : $u = v$.

Nous venons donc de montrer qu'à tout couple de réel (a, b) on pouvait associer une unique suite de $\mathcal{U}$ dont a et b étaient les deux premiers termes. Ceci nous permet donc de définir l'application qui au couple (a, b) associe la suite correspondante, application notée ϕ.

Il est évident que l'application ϕ est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{U}$. Pour établir son caractère bijectif, nous commençons par montrer que son noyau est réduit au vecteur nul. En effet, $\phi(a, b) = 0$ signifie que la suite $\phi(a, b)$ est identiquement nulle, autrement dit tous ses termes sont nuls, et donc en particulier ses premier et deuxième termes, qui sont respectivement a et b.

Nous venons donc d'établir l'injectivité de l'application ϕ. Nous allons montrer sa surjectivité sur $\mathcal{U}$: soit u un élément de $\mathcal{U}$, il est clair que u est entièrement déterminé par u_1, u_2 et la relation de récurrence qui définit $\mathcal{U}$. Ceci se traduit par $u = \phi(u_1, u_2)$, ϕ est donc bien surjective.

Tout ceci permet de conclure que ϕ est un isomorphisme entre les deux espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{U}$, et par conséquent que $\dim(\mathcal{U}) = 2$.

c) Avant toute chose, montrons que v et w sont bien des éléments de $\mathcal{U}$. Il s'agit donc de vérifier, pour v, que pour tout $n \geq 1$,

$$v_{n+2} = \frac{5}{6} v_{n+1} + \frac{5}{36} v_n.$$

Mais $v_{n+2} = \lambda_1^{n+1} = \lambda_1^{n-1} \times \lambda_1^2 = \lambda_1^{n-1}(5/6\lambda_1 + 5/36) = 5/6\lambda_1^n + 5/36\lambda_1^{n-1} = (5/6)v_{n+1} + (5/36)v_n$, où l'on s'est appuyé dans cette suite d'égalités sur la définition de λ_1 comme racine d'un certain polynôme. Il est évident que les mêmes égalités ont lieu en remplaçant λ_1 par λ_2, et donc que w aussi est dans $\mathcal{U}$.
Ensuite, puisque l'on connaît la dimension de $\mathcal{U}$, nous savons qu'il suffit de vérifier que la famille (v, w) est *libre* pour obtenir qu'il s'agit d'une base de $\mathcal{U}$. Soit donc α et β deux réels tels que $\alpha v + \beta w = 0$. Alors, si l'on écrit cette égalité en particulier pour les deux premiers termes de la suite, nous obtenons $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 0$. Puisque $\alpha = -\beta$, la deuxième égalité se réécrit $\alpha(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$, ce qui entraîne que soit $\alpha = \beta = 0$, soit $\lambda_1 = \lambda_2$. Mais l'énoncé précise que ces deux racines sont distinctes (le discriminant vaut $(5/6)^2 + 4 \times (5/36) = 45/36 > 0$), on a donc forcément $\alpha = \beta = 0$. La famille (v, w) est donc bien une base de $\mathcal{U}$.

d) La suite a étant un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{U}$ dont (v, w) est une base, il existe un unique couple de réels (α, β) tel que $a = \alpha v + \beta w$. Si l'on écrit cette égalité en particulier pour les deux premiers termes des suites impliquées, on obtient le système

$$\begin{cases} a_1 & = \alpha + \beta \\ a_2 & = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 & = \alpha + \beta \\ \frac{35}{36} & = \alpha\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{12}\right) + \beta\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{12}\right) \end{cases},$$

puisque l'on a simplement remplacé a_1 et a_2 par leur valeur, ainsi que λ_1 et λ_2 après avoir résolu l'équation du second degré dont ces réels sont racines. La résolution de ce système conduit facilement à

$$\begin{cases} \alpha & = \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{5}}{9} \\ \beta & = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{9} \end{cases},$$

et au total, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{5}}{9}\right)\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{12}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{9}\right)\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{12}\right)^{n-1}.$$

4) *Une conséquence.* On note A l'événement « on n'obtient jamais deux doubles de suite ».

a) Afin d'étudier la dénombrabilité de l'ensemble A, on s'intéresse à l'événement B : « on n'obtient jamais de doubles ». Si l'on appelle $\bar{\Omega}_1$ l'ensemble

$\Omega_1\backslash\{(i,i) : i \in \{1,\dots,6\}\}$, nous avons l'égalité $B = \bar{\Omega}_1^{\mathbb{N}^*}$. Il est alors immédiat que $B \supset \{(1,2);(1,3)\}^{\mathbb{N}^*}$ (par exemple), et tout aussi immédiat que ce dernier ensemble est en bijection avec $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ensemble dont nous savons qu'il est infini non dénombrable. L'ensemble B, qui est plus « gros », est donc lui aussi infini non dénombrable, ainsi que A lui-même, puisqu'il contient B.

b) Nous avons $A = \cap_{n\geq 1} A_n$, et de plus la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est évidemment décroissante pour l'inclusion. Par continuité séquentielle monotone d'une probabilité, il vient

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

car la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est combinaison linéaire de deux suites géométriques, de raisons respectives λ_1 et λ_2, et $|\lambda_1| = (3\sqrt{5}-5)/12 < 1$, $|\lambda_2| = (3\sqrt{5}+5)/12 < 1$.

II/ On définit la variable aléatoire N égale au nombre de lancers avant l'apparition des deux premiers doubles consécutifs. Autrement dit $\{N = n\}$ est l'événement « les deux premiers doubles consécutifs apparaissent aux $(n+1)$-ième et $(n+2)$-ième lancers ».

1) L'événement $\{N = 0\}$ est l'événement où l'on obtient un double au premier et au deuxième lancers. D'où $P(N = 0) = 1/36$.

2) Nous avons $A_{n+1} = \{N \geq n\}$, pour tout $n \geq 0$. En effet, $\{N \geq n\}$ signifie que les deux premiers doubles consécutifs ont lieu au plus tôt lors des $(n+1)$-ième et $(n+2)$-ième lancers. Mais ceci correspond exacetment à l'événement A_{n+1} : « pas deux doubles de suite au cours des $n+1$ premiers lancers », d'où l'égalité entre événements souhaitée.
Ensuite, nous avons les égalités suivantes, pour tout $n \geq 0$:

$$\{N = n\} = \{N \geq n\}\backslash\{N \geq n+1\} = A_{n+1}\backslash A_{n+2}.$$

3) Cette égalité entre événements conduit aussitôt aux égalités suivants entre probabilités :

$$P(N = n) = P(A_{n+1}) - P(A_{n+2}) = a_{n+1} - a_{n+2} = \alpha\lambda_1^n(1-\lambda_1) + \beta\lambda_2^n(1-\lambda_2),$$

et ce pour tout $n \geq 0$.

4) Par définition d'une loi de probabilité, nous devons avoir que la somme des probabilités ci-dessus vaut 1. Vérifions-le :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) &= \alpha(1-\lambda_1)\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_1^n + \beta(1-\lambda_2)\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_2^n \\ &= \alpha + \beta \\ &= a_1 \\ &= 1,\end{aligned}$$

toutes ces égalités étant évidentes.

5) Pour finir, on aimerait bien avoir une idée du temps que prend l'arrivée de ces deux doubles consécutifs. Pour cela, nous allons calculer l'espérance mathématique de N, qui représente « la valeur moyenne » de N, et donne son ordre de grandeur.

$$
\begin{aligned}
E(N) &= \sum_{n=0}^{+\infty} nP(N=n) \\
&= \alpha(1-\lambda_1)\lambda_1 \sum_{n=1}^{+\infty} n\lambda_1^{n-1} + \beta(1-\lambda_2)\lambda_2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\lambda_2^{n-1} \\
&= \alpha(1-\lambda_1)\lambda_1 \times \frac{1}{(1-\lambda_1)^2} + \beta(1-\lambda_2)\lambda_2 \times \frac{1}{(1-\lambda_2)^2} \\
&= \alpha\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} + \beta\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9}\sqrt{5}\right)\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{12}\right)\left(\frac{12}{7+3\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{9}\sqrt{5}\right)\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{12}\right)\left(\frac{12}{7-3\sqrt{5}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9}\sqrt{5}\right)\left(5-3\sqrt{5}\right)\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{7^2-3^2\times 5}\right) \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{9}\sqrt{5}\right)\left(5+3\sqrt{5}\right)\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{7^2-3^2\times 5}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9}\sqrt{5}\right)\left(\frac{80-36\sqrt{5}}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{9}\sqrt{5}\right)\left(\frac{80+36\sqrt{5}}{4}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9}\sqrt{5}\right)\left(20-9\sqrt{5}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{9}\sqrt{5}\right)\left(20+9\sqrt{5}\right) \\
&= 40.
\end{aligned}
$$