Université de Lille 1
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

IPE Math 306 **Année 2009–2010**

Devoir n° 1. Jeu de dés.
A rendre la semaine du 9 novembre.

On effectue une suite infinie de lancers indépendants de deux dés bien équilibrés. On note $\Omega_1 = \{1, \dots, 6\}^2$ et $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace de probabilité[1] correspondant à l'expérience aléatoire avec $\Omega = \Omega_1^{\mathbb{N}^*}$. On s'intéresse au premier instant où l'on obtient deux doubles de suite. On considère ainsi les événements (indépendants) D_n : « on obtient un double au n-ième lancer » pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Question préliminaire. Calculer $p = P(D_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I/ Pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement « on n'obtient *pas* deux doubles de suite au cours des n premiers lancers » et on pose $a_n = P(A_n)$. Remarquons que $A_1 = \Omega$ et $a_1 = 1$.

1) *Mise en route* : calcul des premiers termes.

a) Calculer a_2.

b) Calculer a_3 en conditionnant par rapport à D_3 et à D_3^c.

2) *Relation de récurrence* : le but de cette question est d'établir une relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en exprimant $P(A_{n+2})$ en fonction de $P(A_{n+1})$ et de $P(A_n)$ pour tout $n \geq 1$ (en conditionnant par rapport au $(n+2)$-ième lancer). Soit $n \geq 1$,

a) Montrer que

$$P(A_{n+2} \cap D_{n+2}) = P(A_{n+2}|D_{n+1}^c \cap D_{n+2})P(D_{n+1}^c \cap D_{n+2}).$$

b) Donner sans calculs les valeurs de $P(A_{n+2}|D_{n+1}^c \cap D_{n+2})$ et de $P(A_{n+2}|D_{n+2}^c)$.

c) En déduire la relation de récurrence :

$$a_{n+2} = \frac{5}{6}a_{n+1} + \frac{5}{36}a_n.$$

3) *Résolution du problème.* Cette question est consacrée à l'obtention d'une expression directe de a_n pour $n \geq 1$. Pour cela, on introduit un ensemble de suites réelles

$$\mathcal{U} = \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \ : \ u_{n+2} = \frac{5}{6}u_{n+1} + \frac{5}{36}u_n \right\}.$$

[1] On ne demande pas de décrire la tribu $\mathcal{F}$ et tous les événements considérés sont supposés appartenir à $\mathcal{F}$.

a) Montrer que $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

b) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique suite de $\mathcal{U}$, notée $\phi(a, b)$, telle que $u_1 = a$ et $u_2 = b$.

Montrer ensuite que l'application $\phi : (a, b) \mapsto \phi(a, b)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathcal{U}$ et en déduire la dimension de $\mathcal{U}$.

c) Soient λ_1 et λ_2 les deux racines distinctes de l'équation

$$\lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda - \frac{5}{36} = 0.$$

On définit deux suites v et w par $v_n = \lambda_1^{n-1}$ et $w_n = \lambda_2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que (v, w) forme une base du sous-espace vectoriel $\mathcal{U}$.

d) Déduire des questions précédentes l'expression de a_n pour tout $n \geq 1$. *Indication :* déterminer α et β tels que pour tout $n \geq 1$, $a_n = \alpha v_n + \beta w_n$.

4) *Une conséquence.* On note A l'événement « on n'obtient jamais deux doubles de suite ».

a) L'ensemble A est-il au plus dénombrable ? *Indication :* On pourra étudier au préalable la dénombrabilité de l'événement B : « on n'obtient jamais de doubles ».

b) Exprimer A en fonction de $(A_n)_{n\geq 2}$ et en déduire la valeur de $P(A)$.

II/ On définit la variable aléatoire N égale au nombre de lancers avant l'apparition des deux premiers doubles consécutifs. Autrement dit $\{N = n\}$ est l'événement « les deux premiers doubles consécutifs apparaissent aux $(n + 1)$-ième et $(n + 2)$-ième lancers ».

1) Calculer $P(N = 0)$.

2) Exprimer l'événement A_{n+1} à l'aide de la variable aléatoire N et en déduire l'expression des événements $\{N = n\}$ en fonction des événements A_{n+1} et A_{n+2} pour $n \geq 0$.

3) En déduire la loi de la variable aléatoire N. On pourra se contenter de donner l'expression de $P(N = n)$ pour $n \geq 1$ en fonction de α, β, λ_1 et λ_2.

4) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) = 1$.

5) Calculer $\displaystyle\mathbf{E}(N) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(N = n)$.